

ĐỀ CHÍNH THỨC

Số báo danh

.....

Thời gian: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi thứ nhất: 27/9/2021

(Đề thi có 4 bài, gồm 01 trang)

Bài 1 (5,0 điểm).

1) Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 3, a_2 = 7$ và $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}}$.

2) Cho dãy số $(u_n): u_1 = 2, u_n = 3u_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố lẻ p thì $\sum_{i=1}^{p-1} u_i$ chia hết cho p .

Bài 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(y+1).f(x) + f(x.f(y) + f(x+y)) = y \quad \text{với } \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn không cân ABC có trung tuyến AM và các đường cao BB_1, CC_1 ($B_1 \in AC, C_1 \in AB$). Đường thẳng qua A vuông góc với AM cắt các đường thẳng BB_1, CC_1 lần lượt tại E và F . Gọi (k) là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFM . Giả sử $(k_1), (k_2)$ là các đường tròn tiếp xúc với đường thẳng EF đồng thời tiếp xúc với cung EF không chứa M của đường tròn (k) .

1) Chứng minh rằng $AE = AF$.

2) Chứng minh rằng nếu (k_1) cắt (k_2) tại P và Q thì P, M, Q thẳng hàng.

Bài 4 (5,0 điểm). Xét dãy số gồm 2021 số tự nhiên liên tiếp $1; 2; 3; \dots; 2021$.

1) Mỗi lần lấy ra hai số kề nhau bất kỳ của dãy rồi xếp chúng vào các vị trí vừa lấy nhưng theo chiều ngược lại. Hỏi sau một số lần thực hiện liên tiếp như vậy, ta có thể nhận được dãy viết theo chiều ngược lại $2021; 2020; \dots; 3; 2; 1$ hay không?

2) Mỗi lần lấy ra 10 số hạng bất kỳ của dãy rồi xếp chúng vào vị trí vừa lấy nhưng theo chiều ngược lại. Hỏi sau một số lần thực hiện liên tiếp như vậy, ta có thể nhận được dãy $1; 2; 3; \dots; 2021$ như ban đầu hay không?

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay khi làm bài

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
THANH HÓA NĂM HỌC 2021- 2022**

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

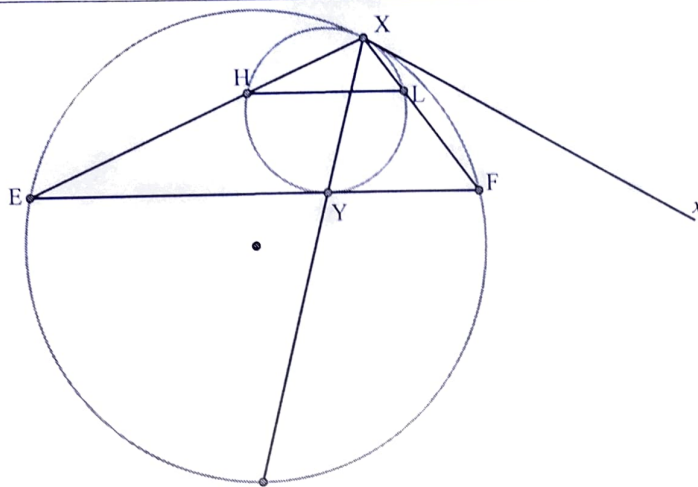
Ngày thi: 27/9/2021

(Đáp án gồm 07 trang)

Bài	Nội dung	Điểm
1 (5 điểm)	1) (3 điểm). Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 3, a_2 = 7$ và $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}}$.	
	Từ giả thiết $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ với $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$. Xét PT đặc trưng $X^2 - 3X + 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ Nghiệm $a_n = A.x_1^n + B.x_2^n = A\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$ Thay $n = 1; n = 2 \Rightarrow A = B = 1$, vậy $a_n = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n = x_1^n + x_2^n$ Trong đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$	1,0
	Suy ra $a_k \cdot a_{k+2} = (x_1^k + x_2^k)(x_1^{k+2} + x_2^{k+2})$ $= x_1^{2k+2} + x_2^{2k+2} + x_1^2 + x_2^2 \quad (\text{do } x_1 \cdot x_2 = 1)$ $= x_1^{2k+2} + 7 + x_2^{2k+2} = (x_1^{k+1} + x_2^{k+1})^2 + 5 = a_{k+1}^2 + 5$ $\Rightarrow a_k \cdot a_{k+2} - a_{k+1}^2 = 5, \forall k = 1, 2, 3, \dots, n$ $\Rightarrow \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{a_k \cdot a_{k+2} - a_{k+1}^2}{a_k \cdot a_{k+1}} = \frac{1}{5} \left(\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots, n$	1,0
	Vậy $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} - \frac{a_{k+1}}{a_k} \right) = \frac{1}{5} \left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_2}{a_1} \right)$ Lại có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{5} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - \frac{7}{3} \right) = \frac{3\sqrt{5} - 5}{30}$	1,0

Trường hợp 2: $f(0)=1 \Rightarrow f(f(y))=-f(0)=-1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. - Xét $P(f(y);y): (y+1).f(f(y))+f(f(y).f(y)+f(f(y)+y))=y$ $\Rightarrow -(y+1)+f(f^2(y)+f(f(y)+y))=y$ $\Leftrightarrow f(f^2(y)+f(f(y)+y))=2y+1 \quad (2)$ - Xét $P(x;0) \Rightarrow f(x)+f(x+f(x))=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x+f(x))=-f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$ Từ (2), (3) $\Rightarrow f(f^2(y)-f(y))=2y+1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ Vậy nên $f(y_1)=f(y_2) \Leftrightarrow 2y_1+1=2y_2+1 \Leftrightarrow y_1=y_2 \quad (**)$ Từ (*) và (**) ta có trong mọi trường hợp f đều là đơn ánh.	2,0
Thay $y=1$ vào (1) ta có $f(f(-1))=-(1-f(0))-f(0)=-1$. - Xét $P(x;-1): f(x.f(-1)+f(x-1))=-1=f(f(-1)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Do f là đơn ánh nên $x.f(-1)+f(x-1)=f(-1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x-1)=f(-1).(1-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x)=-f(-1).x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f(x)=C.x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad C \text{ là hằng số}$	1,5
Thay vào bài toán: $(y+1).Cx+f(Cxy+C(x+y))=y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow Cxy+Cx+C^2xy+C^2x+C^2y=y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ Cho $y=0, x=1 \Rightarrow C^2+C=0 \Leftrightarrow C=0; C=-1$. Cho $y=1, x=0 \Rightarrow C^2=1 \Leftrightarrow C=\pm 1$. Vậy $C=-1 \Rightarrow f(x)=-x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Thử lại ta thấy $f(x)=-x$ là hàm thỏa mãn bài toán.	1,0

2) **Bổ đề:** Cho dây cung FE của đường tròn (ω) ; một đường tròn (O) tiếp xúc với (ω) tại X và tiếp xúc EF tại Y thì XY đi qua trung điểm cung EF của (ω)



Chứng minh: Gọi giao của XF và XE với (O) lần lượt là L và H .

Ta có $FY^2 = FL.FX, EY^2 = EH.EX$.

Kẻ tiếp tuyến Xx của (ω) tại X , ta có được: $\widehat{FXx} = \widehat{LHX} = \widehat{FEX}$

$\Rightarrow LH \parallel FE$ nên $\frac{FL}{FX} = \frac{EH}{EX} \Rightarrow EH = \frac{FL.EX}{FX}$. Vậy

$$\begin{aligned} \frac{FY^2}{EY^2} &= \frac{FL.FX}{EH.EX} \\ &= \frac{FL.FX}{\frac{FL.FX}{FX}.EX.EX} = \frac{FX^2}{EX^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{FY}{EY} = \frac{FX}{EX}.$$

Vậy XY là phân giác $\widehat{FXE}$
(bổ đề được chứng minh).

1,0

Giả sử (k_1) tiếp xúc với EF tại U , tiếp xúc (MEF) tại R ; (k_2) tiếp xúc EF tại V , tiếp xúc (EFM) tại S .

Áp dụng bổ đề ta được R, U, M và S, V, M thẳng hàng.

Dễ thấy $\triangle MEU \sim \triangle MRE(g.g)$; $\triangle MFV \sim \triangle MSF(g.g)$

$$\Rightarrow ME^2 = MU.MR = MF^2 = MV.MS$$

Suy ra M thuộc trục đẳng phương của (k_1) và (k_2) .

Vậy P, Q, M thẳng hàng.

2,0

Vậy việc chứng minh (*) tương đương với chứng minh bài toán: Mỗi lần lấy ra 2 số bất kì của dãy và xếp chúng vào các vị trí vừa lấy theo chiều ngược lại. Chứng minh sau lẻ lần thực hiện liên tiếp như vậy, ta không thể nhận được dãy $1;2;3;\dots;2021$ như ban đầu.

Thật vậy:

Với $i, j \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i < j \leq 2021$, xét ánh xạ $f_{(i,j)} : P \rightarrow P$, $f_{(i,j)}(\delta)$ thu được từ δ bằng cách đổi chỗ của $(\delta(i), \delta(j))$, các vị trí còn lại giữ nguyên. Ta dễ thấy được $f_{(i,j)} = f_{j-1} \circ \dots \circ f_{i+1} \circ f_i \circ \dots \circ f_{j-2} \circ f_{j-1}$ (1)

1,5

là hợp thành của $2(j-i)-1$ ánh xạ.

Theo câu (1), $T(f_i(\delta)) \equiv T(\delta) + 1 \pmod{2}$. (2)

Từ (1) và (2)

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(f_{(i,j)}(\delta)) &\equiv T(\delta) + 2(j-i) - 1 \pmod{2} \\ &\equiv T(\delta) + 1 \pmod{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Giả sử δ_k là thứ tự của 2021 số sau lần xếp thứ k . Ta có $\delta_k \in P$ và $\delta_{k+1} = f_{(i,j)}(\delta_k)$, với $1 \leq i < j \leq 2021$ nào đó.

Theo (3) ta có

$$\begin{aligned} T(\delta_k) &\equiv T(\delta_{k-1}) + 1 \pmod{2} \\ &\equiv \dots \\ &\equiv T(\delta_0) + k \pmod{2} \\ &\equiv k \pmod{2} \end{aligned}$$

1,0

(do $T(\delta_0) = 0$)

Do đó với k lẻ thì $T(\delta_k) \not\equiv 0 \pmod{2}$. Hay $\delta_k \neq \delta_0$ với mọi số k lẻ.

Vậy sau một số lẻ lần như vậy, ta không thể xếp các số về chính vị trí ban đầu.

Chú ý: Hướng dẫn chấm này chỉ thực hiện cho lời giải như trên, nếu thí sinh làm bài theo cách khác thì tổ chấm thống nhất phương án chấm thi cho phù hợp và vẫn cho điểm tối đa nếu cách giải đúng.

ĐỀ CHÍNH THỨC

Số báo danh

.....

Thời gian: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi thứ hai: 28/9/2021

(Đề thi có 3 bài, gồm 01 trang)

Bài 5 (6,0 điểm). Giả sử $P(x)$ là một đa thức hệ số thực thỏa mãn tính chất: với mọi số thực x, y thì $|y^2 - P(x)| \leq 2|x|$ khi và chỉ khi $|x^2 - P(y)| \leq 2|y|$.

Chứng minh rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $P(x) = 0$.

Bài 6 (7,0 điểm). Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, n là số nguyên dương sao cho các số $p-1, p, n, n+1$ từng đôi một không có ước số chung lớn hơn 2. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $x^{p-1} + x^{p-1} + \dots + x + 2 = y^{n+1}$.

Bài 7 (7,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE và CF của tam giác cắt nhau tại H ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Đường tròn (J) ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K ($K \neq A$); AM cắt đường tròn (J) tại điểm thứ hai là Q ($Q \neq A$).

1) Chứng minh các đường thẳng KF, EQ và BC đồng quy.

2) Gọi U là trung điểm của đoạn AM , P là điểm di động trên cung nhỏ AC của (O) . X là hình chiếu vuông góc của M trên AP . Gọi I là trung điểm của PX . Đường thẳng KI cắt (O) tại S ($S \neq K$). Lấy điểm T thuộc đường thẳng KX sao cho IT vuông góc với UI . Chứng minh ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển trên cung nhỏ AC của (O) .

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:.....

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay khi làm bài.

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

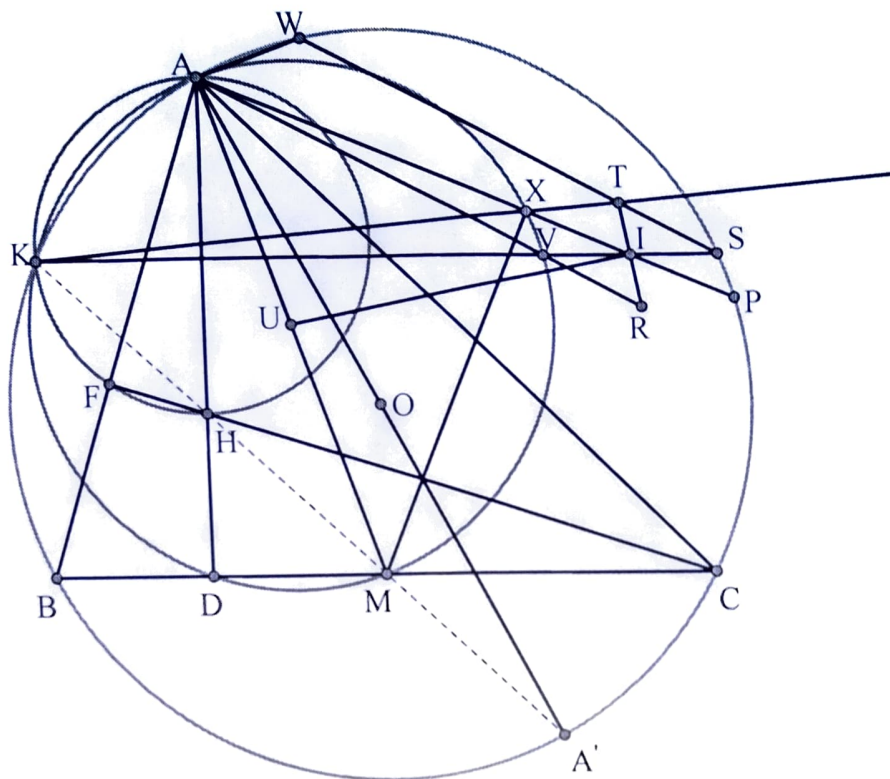
Ngày thi: 28/9/2021

(Đáp án gồm 05 trang)

Bài	Nội dung	Điểm
5 (6 điểm)	Giả sử $P(x)$ là một đa thức hệ số thực thỏa mãn tính chất: với mọi số thực x, y thì $y^2 - P(x) \leq 2 x$ khi và chỉ khi $x^2 - P(y) \leq 2 y$. Chứng minh rằng $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $P(x) = 0$.	
	Phản chứng: Giả sử $P(0) = 0$. - Nếu $P(x)$ là đa thức hằng $\Rightarrow P(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, $y^2 \leq 2 x \Leftrightarrow x^2 \leq 2 y$, không thể xảy ra với mọi số thực x, y. - Nếu $\deg P(x) \geq 1$, đặt $\deg P(x) = n \in \mathbb{N}^*$, gọi a là hệ số bậc cao nhất của $P(x)$. Ta chứng minh $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $P(x) \geq 2 x$. Thật vậy, giả sử tồn tại số thực x_0 sao cho $P(x_0) < 2 x_0$, bằng cách chọn $x = x_0$ và $y = 0$ ta được $P(x_0) < 2 x_0 \Rightarrow x_0^2 \leq 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Do đó $P(0) < 0$ mâu thuẫn. Vậy $P(x) \geq 2 x$ với mọi số thực x. Như vậy ta có $P(x) \neq 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$, mà $P(x)$ một là đa thức nên luôn liên tục trên $(0; +\infty)$. Do đó $P(x) > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ hoặc $P(x) < 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$.	2,0
	Trường hợp 1: $P(x) > 0$ với mọi $x > 0$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$. Với các giá trị $x > 0$, Chọn $y = \sqrt{P(x)}$ thì $y^2 - P(x) = 0 < 2 x$ do đó $x^2 - P(y) \leq 2 y = 2\sqrt{P(x)} \Rightarrow \left \frac{x^2}{\sqrt{P^n(x)}} - \frac{P(y)}{\sqrt{P^n(x)}} \right \leq \frac{2\sqrt{P(x)}}{\sqrt{P^n(x)}}$ Giả sử $n \geq 3$ ta có $\frac{2 y }{\sqrt{P^n(x)}} = \frac{2\sqrt{P(x)}}{\sqrt{P^n(x)}} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^n} = a$ nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(y)}{\sqrt{P^n(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(\sqrt{P(x)})}{(\sqrt{P(x)})^n} = a$. Thành thử $\frac{x^2}{\sqrt{P^n(x)}} \rightarrow a$ khi $x \rightarrow +\infty$ hay $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{n^2}{2}}} \cdot \left(\frac{x^n}{P(x)} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{n^2}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{a} \right)^{\frac{n}{2}}$. Do đó $a = 1$ và $2 = \frac{n^2}{2} \Leftrightarrow n = 2$ mâu thuẫn. Vậy $n = 1$ hoặc $n = 2$	2,0

- Xét $x > 1$. Từ giả thiết suy ra $x^{p-1} + \dots + x + 1 = y^{n+1} - 1 \Rightarrow \frac{x^p - 1}{x - 1} = (y - 1)(y^n + \dots + y + 1) \quad (1)$ Gọi q là ước số nguyên tố bất kỳ của $x^{p-1} + \dots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$, vậy $q \mid (x^p - 1)$ và $(x, q) = 1 \Rightarrow x^{q-1} - 1 \equiv 0 \pmod{q}$ (Theo định lý nhỏ Fermat). Đặt $k = \text{ord}_q(x)$, cho ta: $\begin{cases} k \mid p \\ k \mid q - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 \equiv 0 \pmod{q} \\ x - 1 \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$ Nếu $x - 1 \equiv 0 \pmod{q}$ thì $x^{p-1} + \dots + x + 1 \equiv p \pmod{q} \Rightarrow p \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow p = q$. Vậy tất cả các ước số nguyên tố q của $\frac{x^p - 1}{x - 1}$ thì hoặc $q = p$ hoặc $q \equiv 1 \pmod{p}$. Do đó tất cả các ước của $\frac{x^p - 1}{x - 1}$ hoặc chia hết cho p hoặc đồng dư với 1 theo modulo p.	2,0
Kết hợp với (1) ta có: $\begin{cases} y - 1 \equiv 0 \pmod{p} \\ y - 1 \equiv 1 \pmod{p} \\ y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 \equiv 0 \pmod{p} \\ y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 \equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$ Nếu $y - 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 \equiv n + 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow \begin{cases} n + 1 \equiv 0 \pmod{p} \\ n + 1 \equiv 1 \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 1 \equiv 0 \pmod{p} \\ n \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$ Mâu thuẫn với giả thiết $\begin{cases} (p, n) \leq 2 \\ (p, n + 1) \leq 2 \end{cases}$	2,0
Nếu $y - 1 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow y \equiv 2 \pmod{p}$ $\Rightarrow y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 \equiv 2^{n+1} - 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \\ 2^{n+1} - 1 \equiv 1 \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{n+1} \equiv 1 \pmod{p} \\ 2^{n+1} \equiv 2 \pmod{p} \end{cases}$ Xét $2^{n+1} \equiv 1 \pmod{p}$, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ nên cho ta: $2^{(n+1, p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ Mà $(n + 1, p - 1) \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} 4 \equiv 1 \pmod{p} \\ 2 \equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$. Điều này không xảy ra do $p > 3$. Xét $2^{n+1} \equiv 2 \pmod{p} \Rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod{p}$, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ nên cho ta: $2^{(n, p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$. Mà $(n, p - 1) \leq 2$ nên ta cũng có mâu thuẫn. Vậy không tồn tại các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình (*).	2,0

2)



2,0

Gọi (U) là đường tròn đường kính AM .

Do $\widehat{AKM} = \widehat{AXM} = 90^\circ \Rightarrow X, K \in (U)$.

Giả sử KI cắt (U) tại điểm V , AV cắt tia TI tại điểm R .

Ta có $\widehat{VXP} = \widehat{AKV} = \widehat{AKS} = \widehat{APS} \Rightarrow \widehat{VXP} = \widehat{XPS} \Rightarrow XV \parallel SP$.

Mà I là trung điểm của XP nên I cũng là trung điểm của VS .

Xét tứ giác $AXVK$ nội tiếp (U) , có AX cắt KV tại I và $UI \perp TR$, theo định lý con bướm thì I là trung điểm của TR .

Suy ra $VR \parallel TS$.

Giả sử ST cắt (O) tại $W \Rightarrow AV \parallel WS$

suy ra $\widehat{WAV} = 180^\circ - \widehat{AWS} = \widehat{AKS} = \widehat{AKV} \Rightarrow WA$ là tiếp tuyến của (U)

Cho A, B, C cố định nên (U) cố định và (O) cố định nên W cố định.

Vậy ST luôn đi qua điểm cố định W khi P thay đổi trên cung nhỏ AC .

2,0

Chú ý: Hướng dẫn chấm này chỉ thực hiện cho lời giải như trên, nếu thí sinh làm bài theo cách khác thì tổ chấm thống nhất phương án chấm thì cho phù hợp và xứng đáng.