

Bài 5. (6,0 điểm) Tồn tại hay không hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bị chặn thỏa mãn các điều kiện:

$$f(1) = 1 \text{ và } f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2, \forall x \neq 0.$$

Bài 6. (7,0 điểm) Tìm số tập con A của $X = \{1; 2; 3; \dots, 2023\}$ sao cho tổng các phân tử của A chia hết cho 7.

Bài 7. (7,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC , CA và AB tương ứng tại D , E , F . Đường thẳng EF cắt BC tại G . Gọi K là trung điểm đoạn GD . Đường tròn đường kính GD cắt (I) tại R ($R \neq D$). Gọi P , Q ($P \neq R$, $Q \neq R$) tương ứng là giao của (I) với BR , CR . Hai đường thẳng BQ và CP cắt nhau tại X . Đường tròn (CDE) cắt QR tại M và đường tròn (BDF) cắt PR tại N .

a) Chứng minh rằng KR là tiếp tuyến của đường tròn (RBC) .

b) Chứng minh rằng PM , QN và RX đồng quy.

----HẾT----

Thí sinh không được sử dụng MTCT và tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ ký giám thị 1:..... Chữ ký giám thị 2:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM THI
(Hướng dẫn chấm thi gồm 03 trang)

I. Hướng dẫn chung

- Thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như *Hướng dẫn chấm thi* quy định. Tổ chấm thi thảo luận và thống nhất thang điểm chấm cho những bài có cách giải khác với đáp án trong *Hướng dẫn chấm thi* và ghi thành biên bản chấm thi.
- Việc chi tiết hóa điểm số của từng câu (nếu có) trong *Hướng dẫn chấm thi* phải đảm bảo không làm sai lệch *Hướng dẫn chấm thi* và phải được thống nhất thực hiện thông qua biên bản của Tổ chấm thi.
- Điểm từng câu và toàn bài không làm tròn (tính đến 0,25 điểm).

II. Đáp án và thang điểm

NỘI DUNG	ĐIỂM
Bài 5. (6,0 điểm) Tồn tại hay không hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bị chặn thỏa mãn các điều kiện: $f(1) = 1 \text{ và } f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2, \forall x \neq 0.$	
Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu. + Cho $x = 1$ ta thu được $f(2) = 2$. + Do f bị chặn nên nó có chặn trên tốt nhất, gọi giá trị đó là c , ta có: $f(x) \leq c, \forall x$	1,0
và: Với mỗi $\varepsilon > 0$ (bé tùy ý chọn trước), tồn tại khoảng $I \neq \emptyset$ mà $f(x) > c - \varepsilon, \forall x \in I$.	1,0
+ Ta có $2 = f(2) \leq c$. Tồn tại $y \neq 0$ mà $f(y) > c - \frac{1}{4} \Rightarrow c \geq f\left(y + \frac{1}{y^2}\right) > c - \frac{1}{4} + \left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)^2$ $\Rightarrow \frac{1}{4} > \left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)^2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) > -\frac{1}{2}.$	1,0 1,0
Lại có $c \geq f\left(\frac{1}{y} + y^2\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) + \left(f(y)\right)^2 > -\frac{1}{2} + \left(c - \frac{1}{4}\right)^2$	1,0

$\Rightarrow c > c^2 - \frac{c}{2} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(c - \frac{3}{4}\right)^2 < 1, \text{ mâu thuẫn với } c \geq 2.$ + Vậy không tồn tại hàm nào thỏa mãn yêu cầu.	1,0
Bài 6. (7,0 điểm) Tìm số tập con A của $X = \{1;2;3;\dots,2023\}$ sao cho tổng các phần tử của A chia hết cho 7.	
Xét đa thức $f(x) = (1+x)(1+x^2)\dots(1+x^{2023}) = \sum_{C \subset X} x^{s(C)}$, trong đó $s(C)$ là tổng các phần tử của C. Do đó số tập con A của $X = \{1;2;3;\dots,2023\}$ sao cho tổng các phần tử của A chia hết cho 7 là tổng các hệ số của các lũy thừa dạng x^{7k} với $k \in \mathbb{N}^*$. Gọi S là số tập con cần tìm, ta có $S = \sum_{k=1}^{292468} c_{7k}$. Đặt $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ là một căn bậc 7 của đơn vị.	1,0 1,0 1,0
Nếu k không chia hết cho 7 thì $1 + \varepsilon^k + (\varepsilon^k)^2 + (\varepsilon^k)^3 + (\varepsilon^k)^4 + (\varepsilon^k)^5 + (\varepsilon^k)^6 = \frac{1 - (\varepsilon^k)^7}{1 - \varepsilon^k} = 0$. Nếu k chia hết cho 7 thì $1 + \varepsilon^k + (\varepsilon^k)^2 + (\varepsilon^k)^3 + (\varepsilon^k)^4 + (\varepsilon^k)^5 + (\varepsilon^k)^6 = 7$. Do đó $S = \sum_{k=1}^{292468} c_{7k} = \frac{1}{7} (f(1) + f(\varepsilon) + f(\varepsilon^2) + f(\varepsilon^3) + f(\varepsilon^4) + f(\varepsilon^5) + f(\varepsilon^6)).$	1,5
Vì đa thức $g(x) = x^7 - 1$ có các nghiệm là $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6, \varepsilon^7 = 1$ nên $g(x) = (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^3)(x-\varepsilon^4)(x-\varepsilon^5)(x-\varepsilon^6).$ Suy ra $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^3)(1+\varepsilon^4)(1+\varepsilon^5)(1+\varepsilon^6)(1+\varepsilon^7) = -g(-1) = 2.$	1,5
Vậy $S = \frac{2^{2023} + 6 \cdot 2^{289}}{7}.$	1,0
Bài 7 (7, 0 điểm) Cho ΔABC đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB tương ứng tại D, E, F. Đường thẳng EF cắt BC tại G. Gọi K là trung điểm đoạn GD. Đường tròn đường kính GD cắt (I) tại $R (R \neq D)$. Gọi $P, Q (P \neq R, Q \neq R)$ tương ứng là giao của (I) với BR, CR. Hai đường thẳng BQ và CP cắt nhau tại X. Đường tròn (CDE) cắt QR tại M và đường tròn (BDF) cắt PR tại N. a) Chứng minh rằng KR là tiếp tuyến của đường tròn (RBC). b) Chứng minh rằng PM, QN và RX đồng quy.	

