

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2023-2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

MÔN TOÁN

Ngày thi: Thứ ba 19/9/2023

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1. (5 điểm) Cho dãy (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + \frac{\ln n}{u_n}, \forall n \geq 1$

a) Chứng minh rằng $u_{2023} > \sqrt{2023 \cdot \ln 2023}$.

b) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n \cdot \ln n}{n}$.

Bài 2. (5 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $f(x+1) = f(x) + 1$ và

$$f(x^{2024} + x^{2023} + \dots + x + 1) = (f(x))^{2024} + (f(x))^{2023} + \dots + f(x) + 1$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3. (5 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm P cố định nằm ngoài đường tròn. Từ P vẽ các tiếp tuyến PA, PB đến (O) (A, B là tiếp điểm). C là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của (O) . Tiếp tuyến tại C của (O) cắt PA, PB, PO lần lượt tại D, E và F .

a) Chứng minh rằng đường thẳng qua tâm của (PDE) và tâm của (PCF) luôn đi qua một điểm cố định.

b) Từ O vẽ các tiếp tuyến OX, OY đến (PDE) (X, Y là tiếp điểm). Từ O vẽ các tiếp tuyến OU, OV đến (PCF) (U, V là các tiếp điểm). Chứng minh rằng giao điểm của XY và UV thuộc một đường thẳng cố định.

Chú ý: Kí hiệu (ABC) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 4. (5 điểm) Cho n là một số nguyên dương. Một bảng ô vuông gồm n hàng và n cột gồm n^2 ô vuông đơn vị ta gọi là một bảng $n \times n$.

Với mỗi số nguyên k ($1 \leq k \leq n$), trên mỗi hàng ta chọn k hàng liên tiếp và trên mỗi cột ta chọn k cột liên tiếp, khi đó k^2 ô vuông nằm ở phần giao nhau ta gọi là một bảng con $k \times k$ của bảng $n \times n$ ban đầu.

a) Điền các số $1, 2, 3, \dots, 81$ vào bảng 9×9 . Chứng minh rằng tồn tại bảng con 2×2 có tổng của 4 số được điền trong nó lớn hơn 137.

b) Giả sử n là số lẻ. Mỗi ô vuông đơn vị của bảng $n \times n$ ta điền một số thuộc $\{-1; 0; 1\}$ sao cho mỗi bảng con 2×2 có tổng của 4 số được điền trong nó là 0. Gọi S là tổng của n^2 số trong bảng $n \times n$. Tìm giá trị lớn nhất của S .

-HẾT-

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2023-2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

MÔN TOÁN

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

Ngày thi: Thứ năm 21/9/2023

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 5. (6 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.
Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3} + \sqrt[4]{c^3} \geq \sqrt[8]{243}.$$

Bài 6. (7 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H, D, E, F lần lượt là trực tâm và chân các đường cao qua A, B, C . L, M, N tương ứng là giao điểm của AO với EF, BE, CF . Đường tròn qua A , trung điểm I của EF và trung điểm P của AH cắt lại đường tròn (AEF) tại K .

- Chứng minh AK đi qua tâm J của đường tròn (HMN) .
- Các tiếp tuyến tại E và F của các đường tròn (EDL) và (FDL) cắt nhau tại T . Chứng minh TH và AJ cắt nhau trên BC .

Bài 7. (7 điểm) Cho hai số nguyên dương $m, n \geq 2$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất để tồn tại các số thực $a_1, a_2, \dots, a_k$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- Với $1 \leq l \leq k - m$ thì $a_{l+1} + a_{l+2} + \dots + a_{l+m} > 0$.
- Với $1 \leq l \leq k - n$ thì $a_{l+1} + a_{l+2} + \dots + a_{l+n} < 0$.

-HẾT-

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2023-2024
MÔN TOÁN

Thực hiện bởi đội ngũ giáo viên - trợ giảng trung tâm STAR EDUCATION
Thầy NGUYỄN TĂNG VŨ - NGUYỄN VĨNH KHANG - HUỖNH TRUNG HIỂU
- ĐOÀN QUANG ĐĂNG - NGUYỄN THÁI HÙNG - NGUYỄN THỦY TIÊN

Bài 1

Cho dãy (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + \frac{\ln n}{u_n}, \forall n \geq 1$

a) Chứng minh rằng $u_{2023} > \sqrt{2023 \cdot \ln 2023}$.

b) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n \cdot \ln n}{n}$.

Lời giải. a) Ta chứng minh rằng $u_n > \sqrt{n \ln n}$ với mọi $n \geq 5$. Với $n = 5$, ta tính $u_2 = 1, u_3 = 1 + \ln 2, u_4 = 1 + \ln 2 + \frac{\ln 3}{1 + \ln 2}$, và

$$u_5 = 1 + \ln 2 + \frac{\ln 3}{1 + \ln 2} + \frac{\ln 4}{1 + \ln 2 + \frac{\ln 3}{1 + \ln 2}}$$

Đặt $\ln 2 = a$, ta đánh giá $2a > \ln 3 > \frac{3}{2}a$ (từ $2^3 < 3^2$ ta suy ra $\frac{3}{2} \ln 2 < \ln 3$), nên

$$1 + a + \frac{3a}{2(1+a)} < u_4 < 1 + a + \frac{2a}{1+a}$$

và

$$u_5 > 1 + a + \frac{3a}{2(1+a)} + \frac{2a}{1 + a + \frac{2a}{1+a}} = \frac{2a^4 + 19a^3 + 40a^2 + 19a + 2}{2(a+1)(a^2 + 4a + 1)}$$

Mặt khác, ta có $5^3 < 2^7$, nên $\sqrt{5 \ln 5} < \sqrt{\frac{35}{3} \ln 2}$. Ta chứng minh

$$\frac{2a^4 + 19a^3 + 40a^2 + 19a + 2}{2(a+1)(a^2 + 4a + 1)} \geq \sqrt{\frac{35}{3}a}$$

$$\Leftrightarrow 3(2a^4 + 19a^3 + 40a^2 + 19a + 2)^2 - 140a(a+1)^2(a^2 + 4a + 1)^2 \geq 0$$

Xét $f(x) = 3(2x^4 + 19x^3 + 40x^2 + 19x + 2)^2 - 140x(x+1)^2(x^2 + 4x + 1)^2 = 12x^8 + 88x^7 + 163x^6 - 112x^5 - 290x^4 - 112x^3 + 163x^2 + 88x + 12$. Viết lại

$$\begin{aligned} f(x) &= 12(x^8 - 2x^4 + 1) + 88(x^7 - 2x^4 + x) + (51x^6 - 90x^4 + 51x^2) + 112(x^6 - x^5 - x^3 + x^2) \\ &= 12(x^4 - 1)^2 + 88x(x^3 - 1)^2 + (x^6 + 10x^4 + x^2) + 50(x^2 - 1)^2 + 112x^2(x-1)(x^3 - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

ta có $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq 0$. Như vậy $f(a) \geq 0$, và $u_5 > \sqrt{\frac{35}{3}a} > \sqrt{5 \ln 5}$.

*Giả sử $u_n > \sqrt{n \ln n}$ với $n \geq 5$ nào đó, ta chứng minh $u_{n+1} > \sqrt{(n+1) \ln(n+1)}$. Thật vậy

$$u_{n+1} = \left(\frac{u_n}{n} + \frac{\ln n}{u_n} \right) + \frac{n-1}{n} u_n > 2 \sqrt{\frac{u_n}{n} \cdot \frac{\ln n}{u_n}} + \frac{n-1}{n} \sqrt{n \ln n} = (n+1) \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$$

Mặt khác hàm $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ có $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ với mọi $x \geq 3$, nên $f(x)$ nghịch biến trên $[3, +\infty)$. Kết hợp với $n \geq 3$, ta có $\frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{(n+1)}$, và

$$u_{n+1} > (n+1) \sqrt{\frac{\ln n}{n}} > \sqrt{(n+1) \ln(n+1)}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $u_n > \sqrt{n \ln n}$ với mọi $n \geq 5$. Như vậy $u_{2023} > \sqrt{2023 \ln 2023}$.

b) Theo câu (a), ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{\ln n}{u_n} < \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ với mọi n đủ lớn. Nhưng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} - u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{u_n} = 0$$

Theo định lý Stolz-Cesàro, ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

Thêm nữa, từ câu (a), ta cũng có $\frac{\ln n \ln(n+1)}{u_n} < \sqrt{\frac{\ln n \ln^2(n+1)}{n}}$. Do $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n \ln^2(n+1)}{n} = 0$,

ta được $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n \ln(n+1)}{u_n} = 0$ theo định lý kẹp.

Từ 2 kết quả trên, ta được

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} \ln(n+1) - u_n \ln n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) \ln(n+1) + u_n (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n \ln(n+1)}{u_n} + \frac{u_n}{n} \cdot \frac{\ln(1+1/n)}{1/n} = 0 \end{aligned}$$

với $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+1/n)}{1/n} = 1$ là từ giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$ (theo luật L'Hôpital). Theo

định lý Stolz-Cesàro, ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n \ln n}{n} = 0$. □

Bài 2

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $f(x+1) = f(x) + 1$ và

$$f(x^{2024} + x^{2023} + \dots + x + 1) = (f(x))^{2024} + (f(x))^{2023} + \dots + f(x) + 1$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Trước hết, bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f(x+n) = f(x) + n, \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}.$$

Đặt $P(x) = x^{2024} + x^{2023} + \dots + x + 1$. Ta có các nhận xét

- i) Vì P là đa thức bậc chẵn nên tồn tại $C > 0$ sao cho $P(x) \geq -C + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- ii) Tồn tại $a > 0$ sao cho P đồng biến trên $(a; +\infty)$.
- iii) Tồn tại $b < 0$ sao cho P nghịch biến trên $(-\infty; b)$.

Ta chứng minh P nhận mọi giá trị trên $[1; +\infty)$. Thật vậy, xét $t \geq 1$ tùy ý, vì $P(0) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$ nên theo **Định lý giá trị trung gian** thì phương trình $P(x) = t$ luôn có nghiệm trong $\mathbb{R}$.

Ta có

$$f(P(x)) = P(f(x)) \geq -C + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do P nhận mọi giá trị trên $[1; +\infty)$ nên từ đánh giá trên ta suy ra

$$f(x) \geq -C + 2, \quad \forall x \geq 1.$$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(x) = f([x] + \{x\}) = [x] - 1 + f(1 + \{x\}) \geq x - 2 - C + 2 = x - C.$$

Như vậy $f(x) \geq x - C$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bổ đề. Cho trước $\varepsilon > 0$. Nếu $f(x) \geq x - \varepsilon$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $f(x) \geq x - \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) < x - \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{Z}, n > a + \varepsilon - x$, ta có

$$(x+n) - \frac{\varepsilon}{2} > f(x) + n = f(x+n) > n + x - \varepsilon > a.$$

Điều này dẫn đến

$$P\left(x+n - \frac{\varepsilon}{2}\right) > P(f(x+n)) = f(P(x+n)) \geq P(x+n) - \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, n > a + \varepsilon - x.$$

Điều này tương đương với

$$1 \geq \frac{P(x+n) - P\left(x+n - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}$$

với mọi n nguyên đủ lớn. Điều này không thể xảy ra do vế phải là một đa thức bậc 2023 với hệ số cao nhất dương. Như vậy $f(x) \geq x - \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Áp dụng **Bổ đề** trên với $\varepsilon = C > 0$. Khi đó, bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f(x) \geq x - \frac{C}{2^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Cố định $x \in \mathbb{R}$, cho $n \rightarrow +\infty$ ta suy ra $f(x) \geq x$. Như vậy $f(x) \geq x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta chứng minh $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) > x$. Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{Z}, n > f(x) - b$ ta có

$$b > f(x) - n > x - n.$$

Khi đó, do P nghịch biến trên $(-\infty; b)$ nên ta suy ra

$$P(x-n) > P(f(x)-n) = P(f(x-n)) = f(P(x-n)) \geq P(x-n),$$

vô lý. Như vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn. Vậy tất cả hàm số cần tìm là

$$\boxed{f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét. Một số bài toán tương tự

(1) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời

i) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x^2) = f(x)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

(2) Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời

i) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x^4 - x^2) = f(x)^4 - f(x)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

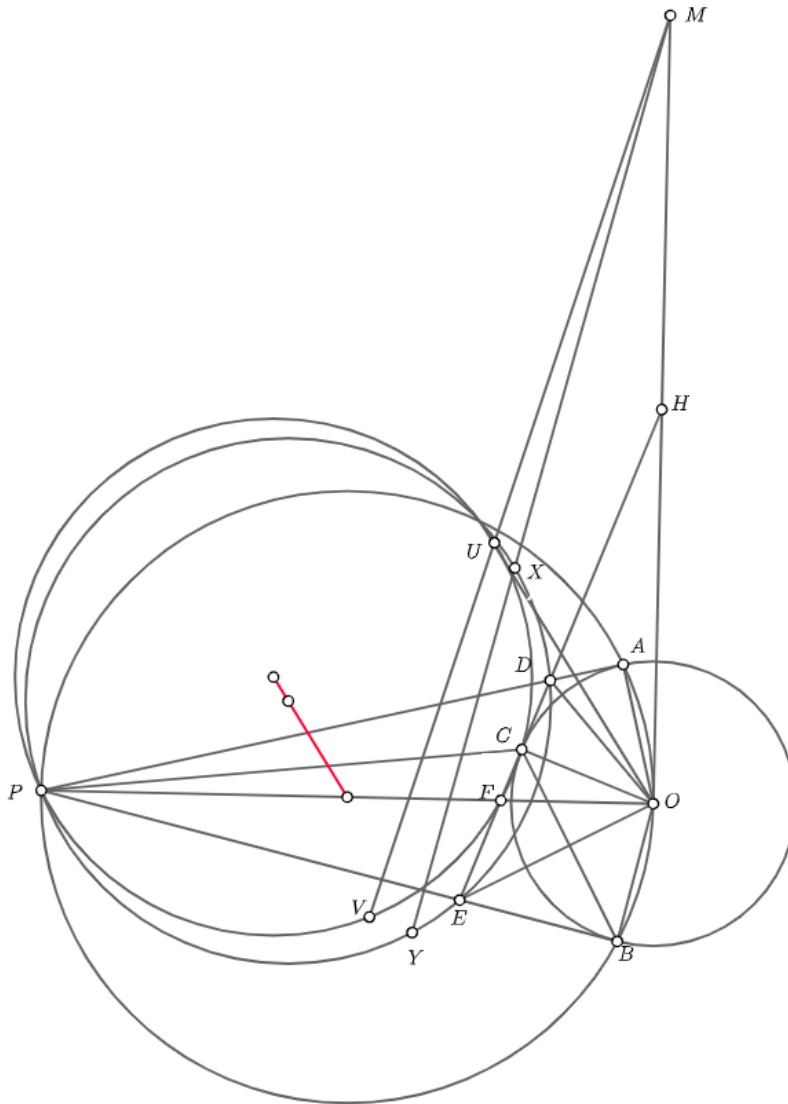
$\square$

Bài 3

Cho đường tròn (O) và điểm P cố định nằm ngoài đường tròn. Từ P vẽ các tiếp tuyến PA, PB đến O (A, B là tiếp điểm). C là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của (O) . Tiếp tuyến tại C của (O) cắt PA, PB, PO lần lượt tại D, E và F .

- Chứng minh rằng đường thẳng qua tâm của (PDE) và tâm của (PCF) luôn đi qua một điểm cố định.
- Từ O vẽ các tiếp tuyến OX, OY đến (PDE) (X, Y là tiếp điểm). Từ O vẽ các tiếp tuyến OU, OV đến (PCF) (U, V là các tiếp điểm). Chứng minh rằng giao điểm của XY và UV thuộc một đường thẳng cố định.

Chú ý: Kí hiệu (ABC) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

Kí hiệu (OP) là đường tròn đường kính OP .

a) Gọi H là giao điểm của đường thẳng ED và đường thẳng qua O vuông góc với OP .

Xét tam giác vuông HOF vuông tại O có đường cao OC , ta có $HO^2 = HC \cdot HF$, hay $\mathcal{P}_{H/(OP)} = \mathcal{P}_{H/(PCF)}$ (1).

Tiếp theo, ta có biến đổi góc sau

$$\widehat{HOD} = \widehat{HOA} + \widehat{AOD} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOB} + \frac{1}{2}\widehat{AOC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{HEO}.$$

Từ đó, ta có $\triangle HOD \sim \triangle HEO$. Do đó, $HO^2 = HD \cdot HE$, hay $\mathcal{P}_{H/(OP)} = \mathcal{P}_{H/(PDE)}$ (2).

Từ (1) và (2), ta được H có cùng phương tích với 3 đường tròn (OP) , (PDE) , (PCF) . Từ đó, ta kết luận PH là trục đẳng phương chung của 3 đường tròn này. Do đó, tâm của chúng thẳng hàng, suy ra đường thẳng qua tâm của (PDE) và tâm của (PCF) đi qua trung điểm OP là điểm cố định.

b) Gọi M là giao điểm của XY và OH . Gọi H' là trung điểm OM .

Ta thấy H' thuộc đường trung bình của tam giác OXY , chính là trục đẳng phương của đường tròn $(O; 0)$ và đường tròn (PDE) . Mà OH' là tiếp tuyến của đường tròn (OP) , do đó $\mathcal{P}_{H'/(OP)} = H'O^2 = \mathcal{P}_{H'/(O;0)} = \mathcal{P}_{H'/(PDE)}$.

Kết hợp với H' thuộc OH , ta kết luận H' trùng H . Do đó, XY đi qua điểm đối xứng của O qua H .

Lập luận tương tự, ta thu được UV cũng đi qua điểm đối xứng của O qua H . Do đó, giao điểm của XY và UV thuộc đường thẳng OH cố định và là điểm đối xứng của O qua H . $\square$

Bài 4

Cho n là một số nguyên dương. Một bảng ô vuông gồm n hàng và n cột gồm n^2 ô vuông đơn vị ta gọi là một bảng $n \times n$.

Với mỗi số nguyên k ($1 \leq k \leq n$), trên mỗi hàng ta chọn k hàng liên tiếp và trên mỗi cột ta chọn k cột liên tiếp, khi đó k^2 ô vuông nằm ở phần giao nhau ta gọi là một bảng con $k \times k$ của bảng $n \times n$ ban đầu.

- a) Điền các số $1, 2, 3, \dots, 81$ vào bảng 9×9 . Chứng minh rằng tồn tại bảng con 2×2 có tổng của 4 số được điền trong nó lớn hơn 137.
- b) Giả sử n là số lẻ. Mỗi ô vuông đơn vị của bảng $n \times n$ ta điền một số thuộc $\{-1; 0; 1\}$ sao cho mỗi bảng con 2×2 có tổng của 4 số được điền trong nó là 0. Gọi S là tổng của n^2 số trong bảng $n \times n$. Tìm giá trị lớn nhất của S .

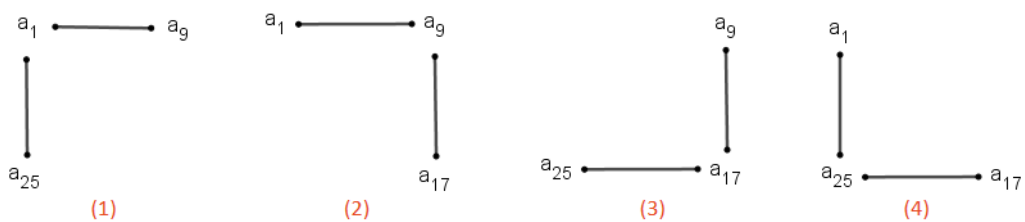
Lời giải.

a)

a_1	a_2	$\dots$	$\dots$					a_9
a_{32}								a_{10}
$\cdot$								$\cdot$
$\cdot$								$\cdot$
$\cdot$								
$\cdot$								
a_{25}					$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	a_{18} a_{17}

Bảng 9×9 có thể tách thành bảng 8×8 và hình chữ Γ gồm 17 ô vuông.

Có 4 cách tách bảng như thế. Các dạng hình chữ Γ (ký hiệu lần lượt $\Gamma(i), i = \overline{1, 4}$) là :



Đặt $S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_9 + \dots + a_{17}$;

$S_2 = a_9 + a_{10} + \dots + a_{17} + \dots + a_{25}$;

$S_3 = a_{17} + \dots + a_{25} + \dots + a_{32} + a_1$;

$S_4 = a_{25} + \dots + a_{32} + a_1 + \dots + a_9$.

Ta có:

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + S_4 &= (a_1 + a_9 + a_{17} + a_{25}) + 2 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{32}) \\ &\leq (81 + 80 + 79 + 78) + 2(81 + 80 + \dots + 50) = 4510 \end{aligned}$$

Suy ra tồn tại $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ sao cho $S_i \leq \frac{4510}{4} = 1127,5$. Không mất tính tổng quát, giả sử $S_1 \leq 1127$.

Tách bảng 9×9 thành bảng 8×8 và hình $\Gamma(2)$. Tổng các hình trong $\Gamma(2)$ là $S_1 \leq 1127$. Do đó tổng các số trong bảng 8×8 phải lớn hơn hoặc bằng $(1 + 2 + \dots + 81) - 1127 = 2194$. Chia bảng 8×8 thành 16 bảng 2×2 rời nhau, trong 16 bảng này phải tồn tại 1 bảng 2×2 có tổng các số phải lớn hơn hoặc bằng $\frac{2194}{16} = 137,125 > 137$. Hoàn tất chứng minh.

- b) Tách bảng $n \times n$ thành bảng $(n-1) \times (n-1)$ và hình chữ Γ gồm $2n-1$ ô vuông. Có thể chia bảng $(n-1) \times (n-1)$ thành các bảng con 2×2 rời nhau nên tổng các số trong bảng $(n-1) \times (n-1)$ bằng 0. Giả sử tổng $S > n$. Khi đó tổng $2n-1$ số trong hình chữ Γ phải lớn hơn hoặc bằng $n+1$. Vì mỗi ô vuông chứa 1 số thuộc $\{0; 1; -1\}$ nên trong hình Γ phải có ít nhất $n+1$ ô chứa số 1. Do đó tồn tại 2 ô liền kề b_1, b_2 cùng chứa số 1.

Không mất tính tổng quát, giả sử 2 ô này nằm trên cùng 1 cột. Vì tổng các số trong 1 bảng con 2×2 bằng 0 nên ta có thể xác định được tất cả các số nằm trên 2 hàng H_1, H_2 chứa 2 ô này. Và ta có thể chọn ra 1 trong 2 hàng này sao cho khi loại bỏ hàng đó đi và loại bỏ cột dọc chứa 2 ô b_1, b_2 thì ta có thể chia phần còn lại thành các bảng con 2×2 rời nhau (do n lẻ và một trong H_1, H_2 là lẻ). Như vậy tổng các số trong phần còn lại của bảng bằng 0.

	b1									
	↓									
H1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	
H2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	...
	↑									
	b2									

Trong hàng với cột ta bỏ thì tổng các số trên hàng là 0 (trừ ô b_1 hoặc b_2) và tổng các số trên cột nhiều nhất là n (do có n ô). Như vậy $S \leq n$, mâu thuẫn. Suy ra tổng S phải bé hơn hoặc bằng n . Ta có cách điền số để $S = n$: trong các cột lẻ của bảng ta điền số 1 toàn bộ và trong các cột chẵn của bảng ta điền số -1 toàn bộ. Vậy giá trị lớn nhất của S là n .

□

Bài 5

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3} + \sqrt[4]{c^3} \geq \sqrt[8]{243}.$$

Lời giải. Ta đưa về bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức thuần nhất sau

$$\left(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3} + \sqrt[4]{c^3}\right)^8 \geq 243(ab + bc + ca)^3.$$

Khi đó, không mất tính tổng quát, giả sử $\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3} + \sqrt[4]{c^3} = 3$. Ta cần chứng minh

$$ab + bc + ca \leq 3.$$

Đặt $x = \sqrt[4]{a^3}, y = \sqrt[4]{b^3}, z = \sqrt[4]{c^3}$. Khi đó $x + y + z = 3$. Bất đẳng thức cần chứng minh viết lại thành

$$xy\sqrt[3]{xy} + yz\sqrt[3]{yz} + zx\sqrt[3]{zx} \leq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\begin{aligned} xy\sqrt[3]{xy} + yz\sqrt[3]{yz} + zx\sqrt[3]{zx} &\leq xy \cdot \left(\frac{x+y+1}{3}\right) + yz \cdot \left(\frac{y+z+1}{3}\right) + zx \cdot \left(\frac{z+x+1}{3}\right) \\ &= xy \cdot \left(\frac{4-z}{3}\right) + yz \cdot \left(\frac{4-x}{3}\right) + zx \cdot \left(\frac{4-y}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3}(xy + yz + zx) - xyz. \end{aligned}$$

Tới đây, để kết thúc bài toán, ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4}{3}(xy + yz + zx) - xyz \leq 3, \text{ với giả thiết } x + y + z = 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$(x + y + z)^3 \geq 4(x + y + z)(xy + yz + zx) - 9xyz \text{ hay } 12(xy + yz + zx) - 9xyz \leq 27.$$

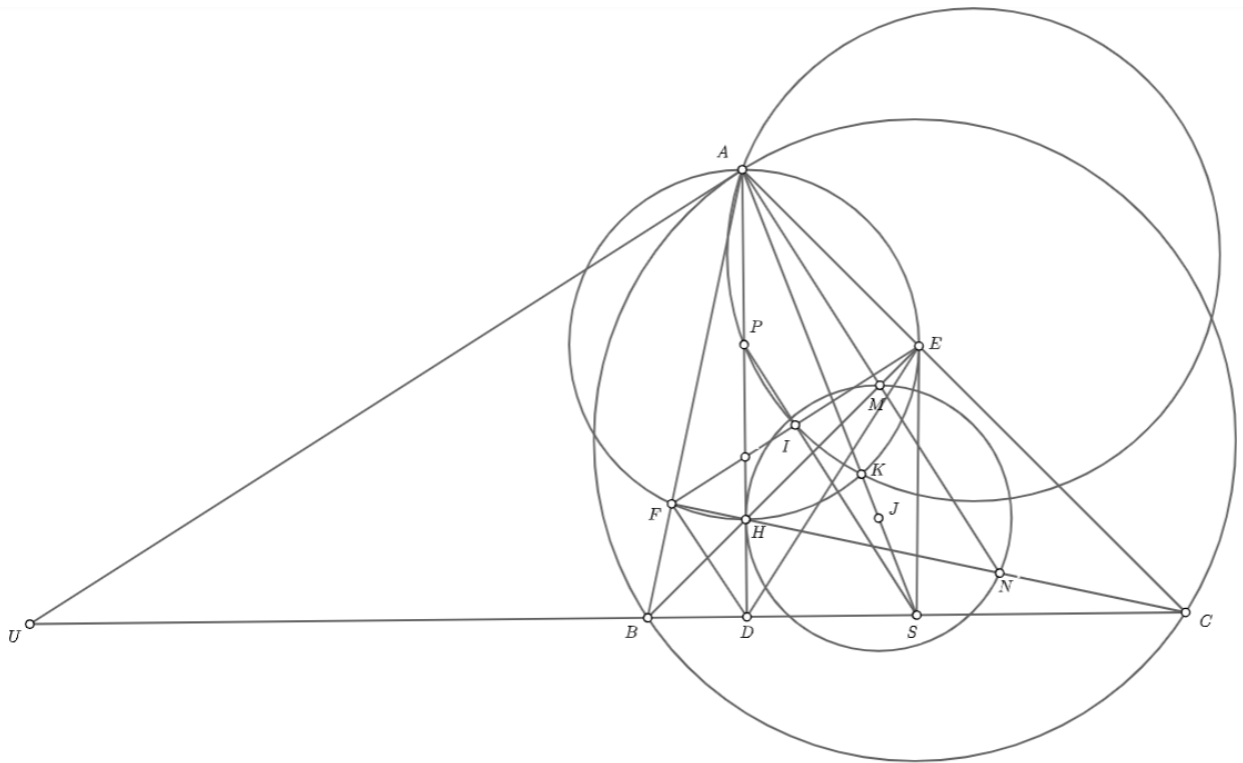
Từ đó, ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. □

Bài 6

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H, D, E, F lần lượt là trực tâm và chân các đường cao qua A, B, C . L, M, N tương ứng là giao điểm của AO với EF, BE, CF . Đường tròn qua A , trung điểm I của EF và trung điểm P của AH cắt lại đường tròn (AEF) tại K .

- Chứng minh AK đi qua tâm J của đường tròn (HMN) .
- Các tiếp tuyến tại E và F của các đường tròn (EDL) và (FDL) cắt nhau tại T . Chứng minh TH và AJ cắt nhau trên BC .

Lời giải.

a) Gọi S là trung điểm BC . Ta có tính chất quen thuộc SP là trung trực của EF và SE, SF tiếp xúc với đường tròn đường kính AH tại E, F tương ứng.

Xét tam giác SFP vuông tại F có đường cao FI , ta có $SP \cdot SI = SF^2$, hay $\mathcal{P}_{S/(API)} = \mathcal{P}_{S/(AH)}$. Do đó, AK đi qua S .

Tiếp theo, ta chứng minh AJ đi qua S .

Ta có $\widehat{MNH} = \widehat{ANF} = 90^\circ - \widehat{OAB} = \widehat{ACB}$. Tương tự, $\widehat{NMH} = \widehat{ABC}$.

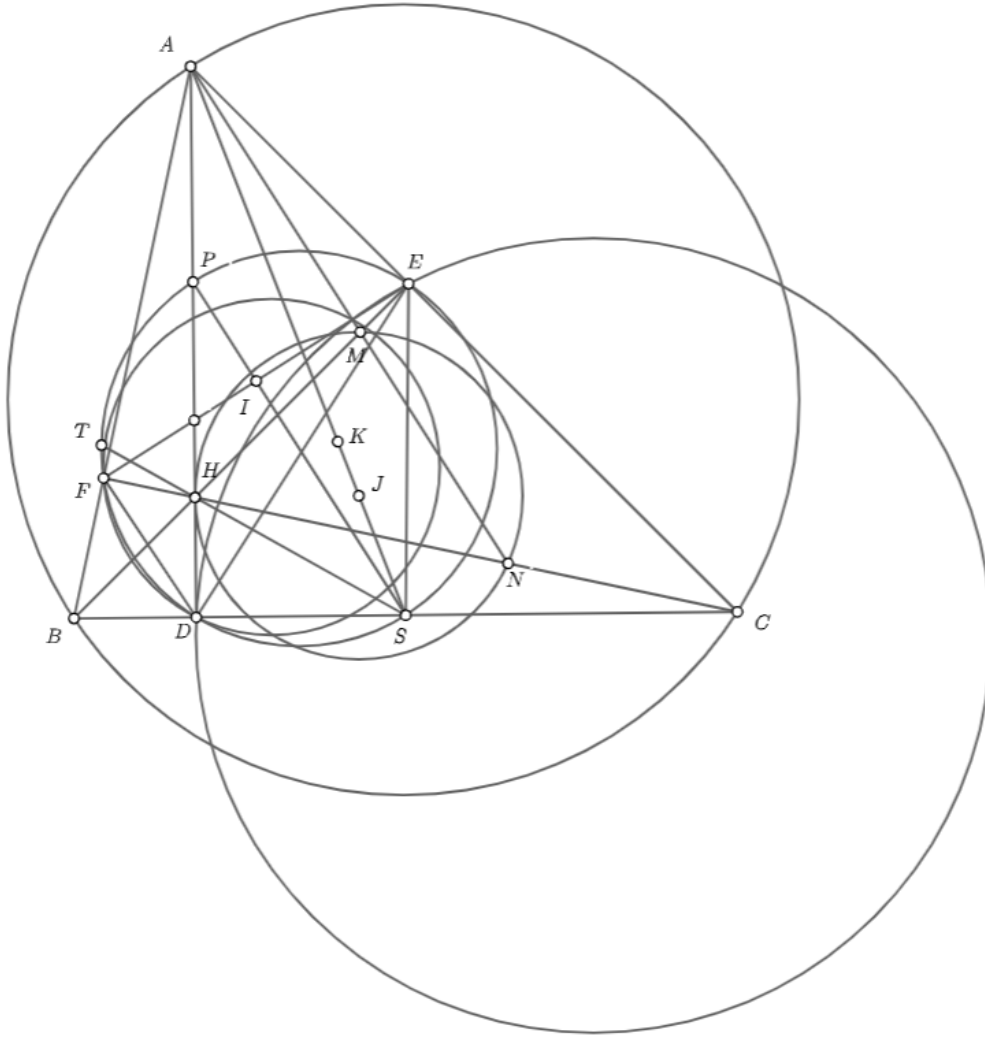
Do đó, $\triangle HMN \sim \triangle ABC$.

Gọi AJ cắt BC tại S' , kẻ tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại U . Do AH tiếp xúc với (HMN) nên

A là giao điểm tiếp tuyến tại H của (HMN) với MN . Kết hợp với tính chất $\triangle HMN \sim \triangle ABC$, ta chứng minh được $\triangle NAJ \sim \triangle CUO$. Do đó

$$\widehat{OUC} = \widehat{NAJ} \text{ hay } \widehat{OUS'} = \widehat{OAS'}.$$

Suy ra tứ giác $OAUS'$ nội tiếp, nên $\widehat{OS'U} = 90^\circ$ hay S' trùng S . Từ đó, ta có AJ đi qua S nên AK đi qua J (đpcm).



b) Trước tiên, ta nhắc lại hai tính chất quen thuộc trong mô hình đường tròn Mixtilinear nội tiếp: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , ngoại tiếp (I) , đường tròn A-mix nội tiếp tiếp xúc với (O) tại X . Gọi Y là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC . Khi đó, ta có hai tính chất sau:

- i. XI đi qua điểm chính giữa cung BC chứa A .
- ii. AX, AY đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

Quay lại bài toán, xét tam giác DEF có H là tâm nội tiếp và A là tâm bàng tiếp góc D của tam giác DEF . Khi đó, ta có L là tiếp điểm đường tròn bàng tiếp góc D của tam giác DEF với EF , S là điểm chính giữa cung FE chứa D của tam giác DEF .

Gọi HS cắt (DEF) tại T' , theo tính chất 1), ta có T' là tiếp điểm của đường tròn D -mix với (DEF) . Từ đó, theo tính chất 2), ta có DT', DL đẳng giác trong góc $\widehat{EDF}$.

Suy ra $\widehat{FDL} = \widehat{T'DE} = \widehat{T'FE} = \widehat{T'FL}$.

Do đó, $T'F$ tiếp xúc với (FDL) . Tương tự, $T'E$ tiếp xúc với (EDL) . Suy ra T' trùng T .

Vì vậy, TH đi qua S , kết hợp với câu (a), ta có đpcm. □

Bài 7

Cho hai số nguyên dương $m, n \geq 2$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất để tồn tại các số thực $a_1, a_2, \dots, a_k$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- i. Với $1 \leq l \leq k - m$ thì $a_{l+1} + a_{l+2} + \dots + a_{l+m} > 0$.
- ii. Với $1 \leq l \leq k - n$ thì $a_{l+1} + a_{l+2} + \dots + a_{l+n} < 0$.

Lời giải. Đặt $d = (m, n)$. Ta chứng minh rằng giá trị lớn nhất của k là $k_{\max} = m + n - d - 1$. Trước hết ta chứng minh rằng nếu $k \geq m + n - d$ thì không tồn tại bộ số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Thật vậy, giả sử rằng có một giá trị $k \geq m + n - d$ để tồn tại bộ số $a_1, a_2, \dots, a_k$ thỏa mãn điều kiện của bài toán. Do với mỗi số nguyên dương $l \geq \max\{m, n\}$, các điều kiện đó vẫn đúng với bộ số $a_1, a_2, \dots, a_l$, nên chỉ cần xem xét trường hợp $k = m + n - d$ là đủ. Với mỗi số nguyên dương $1 \leq i \leq m + n - d$, đặt $S_i = a_1 + \dots + a_i$. Quy ước $S_0 = 0$. Khi đó luôn có được hai đánh giá sau:

- $S_i > S_{i+n}$ với $0 \leq i \leq m - d$.
- $S_i > S_{i-m}$ với $m \leq i \leq m + n - d$.

Xác định dãy số $b_0, b_1, \dots$ như sau: $b_0 = m + n - d$, và

$$b_{i+1} = \begin{cases} b_i + n & \text{nếu } b_i \leq m - d \\ b_i - m & \text{nếu } b_i > m - d. \end{cases}$$

với mọi số tự nhiên i . Do $d \mid b_i$ nên bằng phép quy nạp thì $0 \leq b_i \leq m + n - d$. Chú ý rằng $\{b_i\}$ là dãy số nguyên bị chặn nên tồn tại hai chỉ số $x > y > 0$ sao cho $b_x = b_y$. Ta chứng minh rằng $b_{x-1} = b_{y-1}$. Thật vậy, nếu có điều ngược lại xảy ra thì không mất tính tổng quát, có thể giả sử rằng $b_x = b_{x-1} + n$ và $b_y = b_{y-1} - m$. Khi đó

$$b_{y-1} = b_y + m = b_x + m = b_{x-1} + n + m \geq m + n$$

là điều vô lý do $b_{y-1} \leq m + n - d$. Bằng các lập luận tương tự thì $b_{x-y} = b_0 = m + n - d$. Hơn nữa nhờ cách xác định dãy số $\{b_i\}$ và điều kiện của bài toán mà

$$S_{b_0} > S_{b_1} > \dots > S_{b_{x-y}} = S_{b_0}$$

là điều vô lý. Từ đó không tồn tại bộ số khi $k = m + n - d$.

Bây giờ ta chỉ ra sự tồn tại của một bộ gồm $m + n - d - 1$ số. Xét đồ thị $\mathcal{G}$ với tập hợp các đỉnh là $V = \{0, 1, \dots, m + n - d - 1\}$, và hai đỉnh x, y được nối với nhau bởi một cạnh đơn vô hướng khi và chỉ khi $|x - y| \in \{m, n\}$.

Khi xét theo modulo $m + n$, hai đầu mút mỗi cạnh của $\mathcal{G}$ đều có dạng x và $x + m$ với x nào đó, nên có thể kéo dài tiếp thành dãy cạnh nối các đỉnh có dạng

$$x \rightarrow x + m \rightarrow x + 2m \rightarrow \cdots \rightarrow x + \left(\frac{m+n}{d} - 1 \right) \cdot m \rightarrow x$$

theo modulo $m+n$. Các giá trị trên đôi một phân biệt theo modulo $m+n$ nên dãy cạnh này thực sự mô tả một chu trình đơn trong $\mathcal{G}$. Hơn nữa hai đỉnh của $\mathcal{G}$ không thể kề nhau nếu chúng thuộc về hai lớp đồng dư phân biệt nào đó theo modulo d , nên khi lấy $0 \leq x \leq d-1$, thu được d chu trình đơn đôi một rời nhau và chứa tất cả các đỉnh của $\mathcal{G}$.

Trích được từ mỗi chu trình ra một đường đi đơn có dạng

$$c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \cdots \rightarrow c_{\frac{m+n}{d}-1}$$

mà $|c_{i+1} - c_i| \in \{m, n\}$. Hơn nữa có thể giả sử rằng với mỗi $0 \leq x \leq d-1$, đường đi ứng với chu trình thứ x xuất phát từ đỉnh x . Từ đây xây dựng được $a_1, a_2, \cdots, a_{m+n-d-1}$ như sau:

- Chọn $S_0 = S_1 = \cdots = S_{d-1} = 0$.
- Với mỗi đường đi như trên, xác định S_{c_i} bởi quy tắc:
 - Nếu $c_{i+1} - c_i = m$ thì $S_{c_{i+1}} - S_{c_i} = 1$.
 - Nếu $c_{i+1} - c_i = -m$ thì $S_{c_{i+1}} - S_{c_i} = -1$.
 - Nếu $c_{i+1} - c_i = n$ thì $S_{c_{i+1}} - S_{c_i} = -1$.
 - Nếu $c_{i+1} - c_i = -n$ thì $S_{c_{i+1}} - S_{c_i} = 1$.
- Do $S_{c_{i+1}} - S_{c_i}$ luôn là tổng hoặc đối tổng của m hoặc n số hạng liên tiếp trong các số $a_1, a_2, \cdots, a_{m+n-d-1}$, và các đường đi đơn được chọn chứa tất cả các đỉnh của $\mathcal{G}$, nên kiểm tra được các điều kiện về dấu của tổng m hoặc n số hạng liên tiếp đều thoả mãn.
- Với $1 \leq i \leq m+n-d-1$, chọn $a_i = S_i - S_{i-1}$.

Vậy giá trị lớn nhất của k là $k_{\max} = m+n-d-1$. Bài toán kết thúc. □