

ĐỀ 1

(Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu)

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả các giá trị của x để $A = 4$.

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 1 = 2x_2$.

2. Giải phương trình $x^2 = x + 2 + 2\sqrt{x+1}$.

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+1)(x+3y) = 20 \\ x^2 + 2x + 3y = 12 \end{cases}$.

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O , các đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in CA, F \in AB$). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt DF tại M , MC cắt (O) tại I khác C , IB cắt MD tại N .

- Chứng minh rằng $MA \parallel EF$.
- Chứng minh rằng $\triangle MAF$ cân, tứ giác $AINF$ nội tiếp.
- Chứng minh rằng $MA^2 = MN \cdot MD$.
- Gọi K là giao điểm của CF và đường tròn (O) . Chứng minh rằng A, N, K thẳng hàng.

Câu 4. (1,0 điểm)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2x - y - 3 = 0$.

2. Cho hai số tự nhiên m, n thỏa mãn $m^2 + m = 2n^2 + n$. Chứng minh rằng $m + n + 1$ là số chính phương.

Câu 5. (1,0 điểm)

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2023}{ab + bc + ca}.$$

2. Cho một đa giác đều có 23 đỉnh. Tô màu các đỉnh của đa giác bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tồn tại ba đỉnh của đa giác được tô cùng màu và tạo thành một tam giác cân.

_____ Hết _____

Thí sinh không sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi thứ nhất: Kí tên:

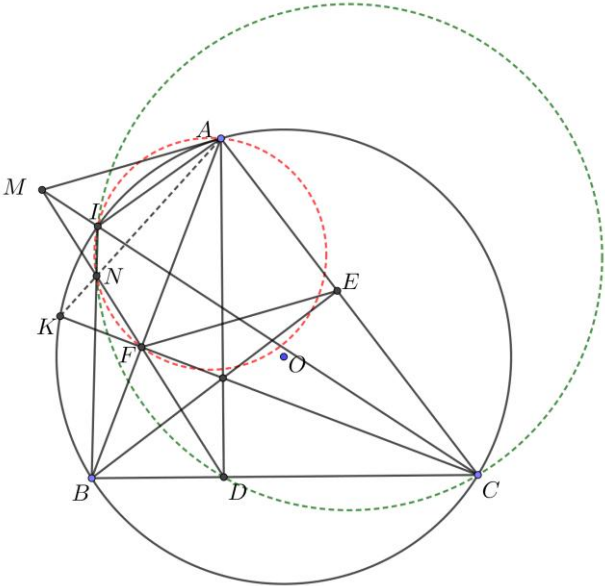
Cán bộ coi thi thứ hai: Kí tên:

HDC ĐỀ 1

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
1	Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A . b) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = 4$.	1,5
	a) ĐKXD: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$	0,25
	$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} + \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : (\sqrt{x}-1)$	0,25
	$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : (\sqrt{x}-1) = \frac{x+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot (\sqrt{x}-1)$	0,25
	$= \frac{x+3}{\sqrt{x}}$. Vậy $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.	0,25
	b) $A = 4 \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x}} = 4 \Leftrightarrow x+3 = 4\sqrt{x} \Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1=0 \\ \sqrt{x}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (loại)} \\ x=9 \text{ (chọn)} \end{cases}$ Vậy với $x = 9$ thì $A = 4$.	0,25
2	1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 1 = 2x_2$. 2. Giải phương trình $x^2 = x + 2 + 2\sqrt{x+1}$ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+1)(x+3y) = 20 \\ x^2 + 2x + 3y = 12 \end{cases}$.	3,0
2.1	1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - m - 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 1 = 2x_2$.	1,0
	Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2x + m + 2 = 0$. Ta có $\Delta' = -1 - m$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -1 - m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ (*).	

	Theo định lý Vi-et ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = m + 2 & (2) \end{cases}$	
	Từ giả thiết $x_1^2 + 1 = 2x_2$ và (1) ta được $x_1^2 + 2x_1 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \Rightarrow x_2 = 5 \\ x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$	
	Thay vào (2) ta có $m = -17$ (thỏa mãn), $m = -1$ (không thỏa mãn).	
2.2	2. Giải phương trình $x^2 = x + 2 + 2\sqrt{x+1}$	1,0
	Ta có $x^2 = x + 2 + 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{x+1} + 1)^2$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{x+1} + 1 & (1) \\ x = -\sqrt{x+1} - 1 & (2) \end{cases}$	
	$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$	
	$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = -x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$	
	Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3, x = -1$	
2.3	3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+1)(x+3y) = 20 \\ x^2 + 2x + 3y = 12 \end{cases}$	1,0
	Ta có $\begin{cases} x(x+1)(x+3y) = 20 \\ x^2 + 2x + 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x)(x+3y) = 20 \\ x^2 + 2x + 3y = 12 \end{cases}$	
	Đặt $u = x^2 + x$ và $v = x + 3y$. Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} uv = 20 \\ u + v = 12 \end{cases}$ Suy ra u, v là hai nghiệm của phương trình $t^2 - 12t + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = 2 \end{cases}$	
	Ta được $\begin{cases} x^2 + x = 10 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} x^2 + x = 2 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$ (II) Giải (I) Ta có: $x^2 + x = 10 \Leftrightarrow x^2 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2} \Rightarrow y = \frac{5 - \sqrt{41}}{6} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{41}}{2} \Rightarrow y = \frac{5 + \sqrt{41}}{6} \end{cases}$	
	Giải (II) Ta có: $x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$ Vậy các nghiệm của hệ là $(1; 3), (-2; 4), (\frac{-1 - \sqrt{41}}{2}; \frac{5 + \sqrt{41}}{6}), (\frac{-1 + \sqrt{41}}{2}; \frac{5 - \sqrt{41}}{6})$.	
3	Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt DF tại M , MC cắt (O) tại I (khác C), IB cắt MD tại N . a) Chứng minh rằng $MA \parallel EF$.	3,5

	b) Chứng minh rằng $\triangle MAF$ cân, tứ giác $AINF$ nội tiếp. c) Chứng minh rằng $MA^2 = MN.MD$. d) Gọi K là giao điểm của CF và đường tròn (O). Chứng minh rằng A, N, K thẳng hàng.	
3a		
	Ta có $BFC = BEC = 90^\circ$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp suy ra $AFE = ACB$ (góc ngoài của tứ giác nội tiếp bằng góc trong không kề với nó).	0,25
	Lại có $ACB = \frac{1}{2}$ số đo AB nên $AFE = \frac{1}{2}$ số đo AB.	0,25
	Theo giả thiết MA là tiếp tuyến nên $MAB = \frac{1}{2}$ số đo AB. Từ đó suy ra $AFE = MAB$. Hai góc này ở vị trí so le trong nên $MA \parallel EF$.	0,25
3b	Theo giả thiết $AFC = ADC = 90^\circ$ nên tứ giác $AFDC$ nội tiếp suy ra $ACB = BFD$ (góc ngoài của tứ giác nội tiếp bằng góc trong không kề với nó).	0,25
	Theo chứng minh trên $ACB = MAB$ $BFD = MFA$ (đối đỉnh). Từ đó ta có $MAB = MFA$ nên $\triangle MAF$ cân tại M.	0,25
	Theo chứng minh trên $ACB = MAB$ $BFD = MFA$ (đối đỉnh). Từ đó ta có $MAB = MFA$ nên $\triangle MAF$ cân tại M.	0,25
	Theo chứng minh trên $ACB = BFD = MFA$ suy ra $AIB + MFA = 180^\circ$ nên tứ giác $AINF$ nội tiếp.	0,25
3c	Ta thấy tứ giác $AIBC$ nội tiếp nên $AIB + ACB = 180^\circ$. Vì tứ giác $AINF$ nội tiếp nên $MNI = BAI$	0,25
	$BAI = BCI$ (cùng chắn cung BI của (O)). Suy ra $MNI = BCI$ nên tứ giác $INDC$ nội tiếp.	0,25
	Ta có $MN.MD = MI.MC$ Mặt khác MA là tiếp tuyến của (O) nên $MI.MC = MA^2$. Từ đó ta có $MA^2 = MN.MD$.	0,25
3d	Ta có $MA^2 = MN.MD$ suy ra MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AND nên $MAN = MDA$	0,25
	Lại có $MDA = FDA = ACK$ (vì $AFDC$ nội tiếp)	0,25

	$ACK = MAK = \frac{1}{2} \text{ số } AK.$ Từ đó suy ra $MAN = MAK$ nên A, N, K thẳng hàng.	0,5
4	1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2x - y - 3 = 0.$ 2. Cho hai số tự nhiên m, n thỏa mãn $m^2 + m = 2n^2 + n$. Chứng minh rằng $m + n + 1$ là số chính phương.	1,0
	1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2x - y - 3 = 0.$	0,5
	Ta có $2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2x - y - 3 = 0.$ $\Leftrightarrow (x - 2y + 1)(2x - y) = 3$	0,25
	$* \begin{cases} x - 2y + 1 = -3 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -4 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}$ $* \begin{cases} x - 2y + 1 = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (nhận)}$ $* \begin{cases} x - 2y + 1 = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (nhận)}$ $* \begin{cases} x - 2y + 1 = -1 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}$ Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(0; -1), (2; 1).$	0,25
4.2	2. Cho hai số tự nhiên m, n thỏa mãn $m^2 + m = 2n^2 + n$. Chứng minh rằng $m + n + 1$ là số chính phương.	0,5
	Ta có $m^2 + m = 2n^2 + n \Leftrightarrow (m - n)(m + n + 1) = n^2$ (*) Gọi $d = (m - n, m + n + 1)$ với $d \in \mathbb{N}^*$ Suy ra $\begin{cases} (m - n) : d \\ (m + n + 1) : d \end{cases} \Rightarrow (m - n)(m + n + 1) : d^2 \Rightarrow n^2 : d^2 \Rightarrow n : d.$	0,25
	Vì $(m - n) : d \Rightarrow m : d \Rightarrow (m + n) : d$ mà $(m + n + 1) : d$ nên $1 : d \Rightarrow d = 1$ Do đó $(m - n, m + n + 1) = 1$. Từ (*) ta được $m - n$ và $m + n + 1$ là số chính phương. Vậy $m + n + 1$ là số chính phương.	0,25
5.1	1. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức	0,5
	$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2023}{ab + bc + ca}.$	
	$* \text{ Ta có } P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{ab + bc + ca} + \frac{2021}{ab + bc + ca}$ $= \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4}{2ab + 2bc + 2ca} \right) + \frac{2021}{ab + bc + ca}$	0,25

	Áp dụng BĐT quen thuộc $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}, (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ $\Rightarrow P \geq \frac{(1+2)^2}{(a+b+c)^2} + \frac{2021}{\frac{(a+b+c)^2}{3}} \geq 9 + \frac{2021}{\frac{1}{3}} = 6072$ Vậy $P_{\min} = 6072 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.	0,25
5.2	2. Cho một đa giác đều có 23 đỉnh. Tô màu các đỉnh của đa giác bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn chọn ra được ba đỉnh của đa giác được tô cùng màu và tạo thành một tam giác cân.	0,5
	Ta có đa giác có 23 đỉnh, do đó phải tồn tại 2 đỉnh kề nhau là P và Q được tô cùng màu (Theo nguyên lý Dirichlet), giả sử P và Q cùng được tô màu xanh. Vì đa giác đã cho là đa giác đều có số đỉnh lẻ nên phải tồn tại một đỉnh nào đó nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng PQ. Giả sử đỉnh đó là A.	0,25
	Nếu A tô màu xanh thì ta có tam giác APQ là tam giác cân có ba đỉnh A, P, Q được tô cùng màu Nếu A tô màu đỏ, lúc đó gọi B và C là các đỉnh khác nhau của đa giác kề với P và Q. Nếu cả hai đỉnh B và C được tô màu đỏ thì tam giác ABC cân và có ba đỉnh cùng màu đỏ Nếu ngược lại, một trong hai đỉnh B và C được tô màu xanh thì tam giác BPQ hoặc tam giác CPQ là tam giác cân có ba đỉnh cùng màu xanh. Vậy trong mọi trường hợp luôn chọn ra được ba đỉnh của đa giác được đánh dấu giống nhau và tạo thành một tam giác cân.	0,25

Lưu ý.

- HDC chỉ mang tính chất tham khảo. Nếu thí sinh có lời giải đúng nhưng khác HDC, giám khảo vẫn cho điểm tối đa.
- Câu 3 có nhiều ý liên quan tới nhau. Trường hợp thí sinh chưa chứng minh được ý trước nhưng lại dùng kết quả ý trước để chứng minh ý sau, nếu lời giải đúng thì giám khảo vẫn cho điểm tối đa.
- Câu 3 nếu thí sinh có lời giải đúng nhưng hình vẽ sai thì giám khảo cho tối đa 50% số điểm.