

Câu 1. Trắc nghiệm: 2,5 điểm. Mỗi ý 0,25 điểm

1. Biểu thức $P = \sqrt{x-9}$ có nghĩa khi

- A. $x \leq 9$ B. $x \geq -9$ C. $x \leq -9$ D. $x \geq 9$

2. Kết quả của phép tính $\sqrt{7^2} + \sqrt{(-7)^2}$ bằng

- A. 14 B. $\sqrt{98}$ C. 0 D. -14

3. Giá trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ tại $x = -3$ bằng

- A. 3 B. 1 C. -1 D. -3

4. Cho hai điểm B, C thuộc đường tròn (O). Hai tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau tại A, biết $\angle BAC = 45^\circ$. Số đo $\angle BOC$ bằng

- A. 45° B. 135° C. 145° D. 90°

5. Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có bán kính $R = 12\text{cm}$, Độ dài cạnh của $\triangle ABC$ bằng :

- A. $24\sqrt{3}\text{cm}$ B. $6\sqrt{3}\text{cm}$ C. $12\sqrt{3}\text{cm}$ D. $9\sqrt{3}\text{cm}$

6. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $BC = 30\text{cm}$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là :

- A. $30\sqrt{2}\text{cm}$ B. $15\sqrt{2}\text{cm}$ C. 15cm D. 24cm

7. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, đường cao AH, biết $BH = 2\text{cm}$, $CH = 32\text{cm}$. Độ dài đường cao AH bằng

- A. 20cm B. 9cm C. 25cm D. 8cm

8. Parabol $y = 2x^2$ và đường thẳng nào sau đây **không** có điểm chung ?

- A. $y = \frac{1}{3}x + 5$ B. $y = -x - 5$ C. $y = 6x - \frac{1}{2}$ D. $y = -\frac{1}{3}x + 2$

9. Số giao điểm của hai đồ thị $y = 4x^2$ và $y = 5x + 3$ là

- A. 2 B. 3 C. 0 D. 1

10. Biết $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$. Khi đó giá trị của biểu

thức $2x_0^2 - y_0^2$ là

- A. 1 B. 7 C. -1 D. -7

Câu 2. (1,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}} \left(\begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A

Câu 3. (1,5 điểm) Giải các phương trình, hệ phương trình sau :

a) $3\sqrt{x-1} + \sqrt{4x+1} = 6$

b)
$$\begin{cases} x^2 - 3xy - 2x + 12y - 8 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 3xy + 4x - 16 = 0 \end{cases}$$

Câu 4. (1,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình

$$x^2 + 2xy - 6x - 6y + 6 = 0$$

b) Cho x, y, z là các số thực dương, thỏa mãn $x + y + z = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức
$$T = \frac{x^3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 8\sqrt{y}} + \frac{y^3\sqrt{y}}{\sqrt{y} + 8\sqrt{z}} + \frac{z^3\sqrt{z}}{\sqrt{z} + 8\sqrt{x}}$$

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$), nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A cắt đường thẳng BC tại D . Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC , E là điểm đối xứng của A qua BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BE . Gọi I là trung điểm của AH , đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq B$)

a) Chứng minh rằng tứ giác $AIMK$ nội tiếp trong một đường tròn

b) Chứng minh rằng $EK \perp DK$

c) Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK

Câu 6. (1,0 điểm)

a) Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $P(1) = 4; P(2) = 6, P(3) = 10$.

Tính giá trị của $S = P(-3) + 5.P(5)$

b) Trên mặt phẳng Oxy cho 2023 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính $1cm$ chứa không ít hơn 1012 điểm đã cho

ĐÁP ÁN

Câu 1. Trắc nghiệm

1D 2A 3A 4B 5C 6C 7D 8B 9A 10B

Câu 2. (1,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}} \begin{pmatrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix}$

c) Rút gọn biểu thức A

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}} \begin{pmatrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(1-x)} \\ &= \frac{x^2+1+x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A

Với $x > 0, x \neq 1$, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x} + 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}+2} \\ &\geq 4\sqrt[4]{x\sqrt{x} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{x}}} + 2 = 4\frac{\sqrt[3]{3}}{3} + 2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min A = 4\frac{\sqrt[3]{3}}{3} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 3. (1,5 điểm) Giải các phương trình, hệ phương trình sau :

$$\begin{aligned} a) 3\sqrt{x-1} + \sqrt{4x+1} &= 6 (x \geq 1) \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} - 3 + \sqrt{4x+1} - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt{x-1} - 1) + \sqrt{4x+1} - 3 &= 0 \Leftrightarrow 3\frac{x-1-1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{4x+1-9}{\sqrt{4x+1}+3} = 0 \\ \Leftrightarrow (x-2) \cdot \left[\frac{3}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{4}{\sqrt{4x+1}+3} \right] &= 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (do } \frac{3}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{4}{\sqrt{4x+1}+3} > 0) \end{aligned}$$

Vậy $x = 2$

$$b) \begin{cases} x^2 - 3xy - 2x + 12y - 8 = 0(1) \\ x^2 + 2y^2 - 3xy + 4x - 16 = 0(2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có :

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy - 2x + 12y - 8 = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 8) - (3xy - 12y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)(x+2) - 3y(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2-3y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 3y - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x = 4$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2) &\Leftrightarrow 4^2 + 2y^2 - 3 \cdot 4 \cdot y + 4 \cdot 4 - 16 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow (y-2)(y-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x = 3y - 2$ thay vào (2) ta được :

$$\begin{aligned} (3y-2)^2 + 2y^2 - 3(3y-2)y + 4(3y-2) - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y^2 + 3y - 10 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \Rightarrow x = -17 \\ y = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(4;2), (4;4), (-17;-5), (4;2)$

Câu 4. (1,0 điểm)

c) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy - 6x - 6y + 6 &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 2xy - 6y = -3 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 + 2y(x-3) = 3 \Leftrightarrow (x-3)(x-3+2y) = 3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = -1 \cdot -3 = -3 \cdot -1 \\ *) \begin{cases} x-3=1 \\ x-3+2y=3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} & *) \begin{cases} x-3=3 \\ x-3+2y=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} \\ *) \begin{cases} x-3=-1 \\ x-3+2y=-3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} & *) \begin{cases} x-3=-3 \\ x-3+2y=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \end{aligned}$$

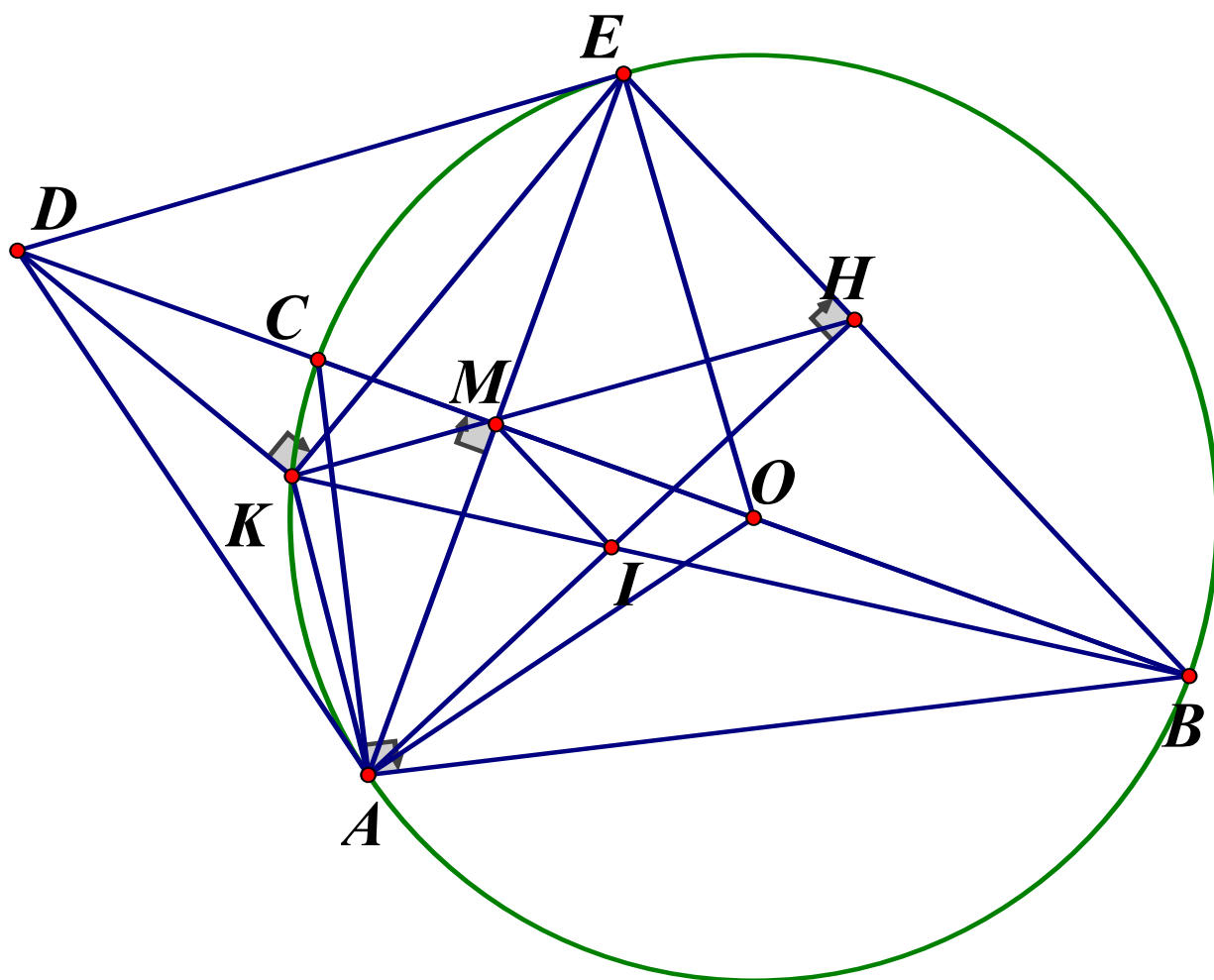
Vậy ta có các cặp số $(4;1); (6;-1), (2;-1), (0;1)$

d) Cho x, y, z là các số thực dương, thỏa mãn $x + y + z = 9$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức
$$T = \frac{x^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+8\sqrt{y}} + \frac{y^3\sqrt{y}}{\sqrt{y}+8\sqrt{z}} + \frac{z^3\sqrt{z}}{\sqrt{z}+8\sqrt{x}}$$

(BÍ)

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB > AC$), nội tiếp đường tròn tâm O . Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A cắt đường thẳng BC tại D . Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC , E là điểm đối xứng của A qua BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BE . Gọi I là trung điểm của AH , đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq B$)



d) Chứng minh rằng tứ giác $AIMK$ nội tiếp trong một đường tròn

Ta có M là trung điểm AE (E là điểm đối xứng của A qua BC và M là chân đường vuông góc kẻ từ A đến BC); I là trung điểm của $AH \Rightarrow MI$ là đường trung bình của $\triangle AHE \Rightarrow MI \parallel EH \Rightarrow \angle AMI = \angle AEB$ (hai góc đồng vị)

Lại có $\angle AEB = \angle AKI$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$$\Rightarrow \angle AMI = \angle AKI (= \angle AEB)$$

Tứ giác $AIMK$ có hai đỉnh M, K cùng nhìn cạnh AI dưới các góc bằng nhau nên là tứ giác nội tiếp

e) Chứng minh rằng $EK \perp DK$

Ta có A và E đối xứng qua $BC \Rightarrow BC$ là trung trực của AE nên $OA = OE$ suy ra $E \in (O)$

$\triangle OED = \triangle OAC$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle OED = \angle OAC = 90^\circ \Rightarrow OE \perp DE$ tại $E \in (O)$ nên DE là tiếp tuyến của (O) nên $\angle DEK = \angle KAE$ (cùng chắn cung AE) (1)

Lại có $\angle DMA = 90^\circ$ ($AM \perp BC$); $\angle AIM = 90^\circ$ ($MI \parallel EH, AH \perp BE$)

Tứ giác $AIMK$ nội tiếp

$$\Rightarrow \angle DMK = \angle DMA - \angle KMA = 90^\circ - \angle KMA = 90^\circ - \angle KIA = \angle KIM = \angle KAM$$
 (2)

Từ (1), (2) ta có $\angle DEK = \angle DMK \Rightarrow$ tứ giác $DKME$ có hai đỉnh E, M cùng nhìn cạnh DK dưới góc bằng nhau $\Rightarrow$ tứ giác $DKME$ nội tiếp nên :

$$\angle DKE = \angle DME = 90^\circ \Rightarrow DK \perp EK$$

f) Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK

Tứ giác $DKME$ nội tiếp suy ra $\angle KDB = \angle KEA$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KM)

$\angle KEA = \angle DAK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK)

$\Rightarrow \angle KDB = \angle DAK (= \angle KEA) \Rightarrow DB$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADK$ (định lý đảo của định lý về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Câu 6. (1,0 điểm)

c) Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $P(1) = 4; P(2) = 6, P(3) = 10$.

Tính giá trị của $S = P(-3) + 5.P(5)$

Xét đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

Giả sử $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-1)(x-2)(x-3)(x-q) + mx^2 + nx + p$

Do $P(1) = 4, P(2) = 6, P(3) = 10$, nên thay vào, ta có :

$$\begin{cases} m+n+p=4 \\ 4m+2n+p=6 \\ 9m+3n+p=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \\ p=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + x^2 - x + 4$$

$$\Rightarrow P(-3) = 120q + 376; P(5) = 144 - 24q$$

$$\Rightarrow S = P(-3) + 5P(5) = 120q + 376 + 5.144 - 5.24q = 1096$$

Vậy $S = 1096$

d) Trên mặt phẳng Oxy cho 2023 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn bán kính $1cm$ chứa không ít hơn 1012 điểm đã cho

Gọi AB là đoạn thẳng có độ dài lớn nhất trong số các đoạn thẳng nối 2 trong số 2023 điểm đã cho

Nếu $AB \leq 1$ thì hình tròn $(A;1)$ chứa toàn bộ 2023 điểm đã cho, khẳng định hiển nhiên đúng.

Nếu $AB > 1$, xét điểm C bất kì trong số 2021 điểm còn lại. Theo giả thiết, ta có $AC < 1$ hoặc $BC < 1$ nghĩa là $C \in (A;1)$ hoặc $C \in (B;1)$ Vậy mọi điểm C trong 2021 điểm

còn lại thuộc một trong hai hình tròn tâm A hoặc B bán kính bằng 1. Theo

nguyên lý Dirichlet có một đường tròn chứa ít nhất $\left\lceil \frac{2021}{2} \right\rceil + 1 = 1011$ điểm. Điểm A

hoặc điểm B cùng với 1011 điểm này tạo thành 1012 điểm nằm trong đường tròn bán kính bằng 1. Vậy luôn tồn tại hình tròn bán kính $1cm$ chứa không ít hơn 1012 điểm đã cho.