

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 25/3/2022

(Đề thi có 02 trang, gồm 05 bài)

Bài 1. (5,0 điểm)

Câu 1. (1,0 điểm) Giải phương trình: $x^6 - 7|x|^3 - 8 = 0$ trên tập số thực.

Câu 2. (2,0 điểm) Giải bất phương trình: $x^2 - 2x + 2 - 3\sqrt{x^2 - 2x} \leq 0$ trên tập số thực.

Câu 3. (2,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{y-4} = 2 \\ \sqrt{x^2 + 4x + y} + 2\sqrt{y-4} = 4 - x\sqrt{y-4} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 2. (4,0 điểm)

Câu 1. (2,0 điểm) Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình: $8\cos^3 x = 6\cos x + \sqrt{2\cos x + 2}$ trên đoạn $[0; \pi]$.

Câu 2. (2,0 điểm) Bạn Anh viết một dãy các ký tự ngẫu nhiên từ trái sang phải trên hàng ngang vào một tấm bìa (mỗi tấm bìa là một dãy các ký tự). Dãy ký tự gồm 4 chữ cái và 3 chữ số. Hai chữ cái đầu được lấy từ tập $\{Q; T; X; L\}$. Hai chữ cái tiếp theo được lấy từ tập $\{G; V; Đ; M; C\}$. Ba ký tự chữ số được lấy từ tập $\{1; 4; 3\}$. Mỗi ký tự chỉ được viết đúng một lần từ các tập nêu trên. Bạn Lan chọn ngẫu nhiên một tấm bìa mà bạn Anh đã viết. Tính xác suất để bạn Lan lấy được tấm bìa có ghi một trong các từ “QT”; “XL”; “GM”; “VD”; “CV” hoặc “314”.

Bài 3. (3,0 điểm)

Câu 1. (1,5 điểm) Cho dãy số (x_n) xác định như sau $x_1 = 7; x_{n+1} = 9x_n^3 - 9x_n^2 + 3x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát x_n .

Câu 2. (1,5 điểm) Hỏi có bao nhiêu cách chia tập hợp số $X = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$ thành ba tập con tách rời nhau để không tập nào trong số chúng chứa một cặp số tự nhiên liên tiếp?

Bài 4. (3,5 điểm)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + bc + ca = 3$ và $c^2 + ab \leq 2ca$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a^2 + 2b + 2c$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa
$$\begin{cases} f(3-2x) + 3g(3-2x) = 4 + \frac{2}{3-2x} \\ f\left(\frac{2}{x}\right) - g\left(\frac{2}{x}\right) = -x \end{cases},$$

với mọi số thực $x \neq \frac{3}{2}, x \neq 0$. Tính $S = 2022.f(2022) + 2023.g(2023)$.

Bài 5. (4,5 điểm)

Câu 1. (2,5 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho điểm $M(-2;1)$.

- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và hợp với trục Ox một góc 60° .
- Đường thẳng d qua M và cắt hai tia Ox', Oy lần lượt tại A, B . Viết phương trình đường thẳng d sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.

Câu 2. (2,0 điểm) Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) (bán kính $R_1 < R_2$) cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt và điểm O_1 nằm ngoài (O_2) . Điểm M là điểm chính giữa cung $\widehat{AB}$ của (O_1) (M nằm bên trong (O_2)). Một dây cung không phải là đường kính, MP của (O_1) cắt (O_2) tại điểm Q (Q nằm trong (O_1)) và điểm còn lại tại R . Gọi t_P, t_M lần lượt là tiếp tuyến của (O_1) tại điểm P, M và t_Q là tiếp tuyến của đường tròn (O_2) tại Q . Gọi F là giao điểm của MP và AB , hai điểm $S, T \in (O_2)$ sao cho $SR \parallel AB$, $RT \parallel t_P$. Chứng minh rằng Q là điểm chính giữa cung $\widehat{TQS}$ của (O_2) và đường tròn ngoại tiếp tam giác được tạo bởi ba đường thẳng t_P, t_Q và AB tiếp xúc với đường tròn (O_2) .

-----HẾT-----

Ghi chú:

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- Giám thị không giải thích gì thêm.*

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 25/3/2022
(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

A. HƯỚNG DẪN CHẤM

- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định;
- Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm lệch hướng dẫn chấm;
- Sau khi cộng điểm toàn bài thi vẫn giữ nguyên số điểm, không được làm tròn.

B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

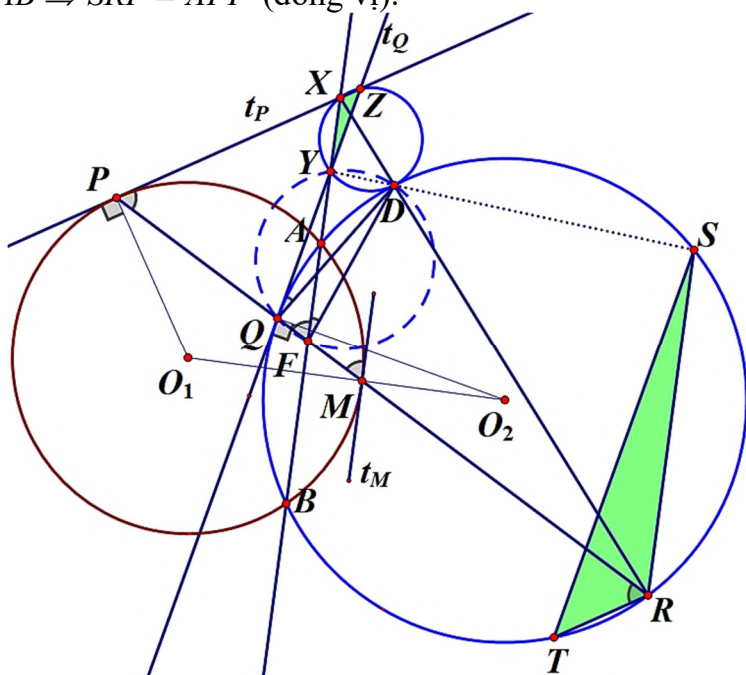
Bài	Câu	Nội dung	Biểu điểm
Bài 1. (5,0 điểm)	1. (1,0đ)	Giải phương trình $x^6 - 7 x ^3 - 8 = 0$ (1) trên tập số thực	
		Đặt $u = x ^3, u \geq 0$	0.25
		Thay vào (1) ta được $u^2 - 7u - 8 = 0$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 8 \\ u = -1 \end{cases}$. So với điều kiện nhận $u = 8$.	0.25
		$\Rightarrow x ^3 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2$.	0.25
	2. (2,0đ)	Giải bất phương trình $x^2 - 2x + 2 - 3\sqrt{x^2 - 2x} \leq 0$ trên tập số thực.	
		Điều kiện: $x \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$	0.5
		Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x}, t \geq 0$. Bất phương trình đã cho trở thành	0.25
		$t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} \geq 1 \\ \sqrt{x^2 - 2x} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 4 \leq 0 \\ x \leq 0, x \geq 2 \end{cases}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 - \sqrt{2}, x \geq 1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{5} \leq x \leq 1 + \sqrt{5} \\ x \leq 0, x \geq 2 \end{cases}$	0.5
		Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1 - \sqrt{5}; 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{5}]$.	0.25
	3. (2,0đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{y - 4} = 2 & (1) \\ \sqrt{x^2 + 4x + y} + 2\sqrt{y - 4} = 4 - x\sqrt{y - 4} & (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$.	
		Điều kiện: $y \geq 4$.	0.25
		Rút biến y từ (1) ta được $y = (2 - x)^2 + 4 = x^2 - 4x + 8$ với $x \leq 2$.	0.25
		Thay y vừa tìm được và $\sqrt{y - 4} = 2 - x$ vào (2) ta được $\sqrt{x^2 + 4x + (x^2 - 4x + 8)} + 2(2 - x) = 4 - x(2 - x)$	0.5

		$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 8} = x^2$	0.25							
		$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$	0.25							
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 4 \\ x = -2 \Rightarrow y = 20 \end{cases}$	0.25							
		Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là $(2; 4), (-2; 20)$.	0.25							
Bài 2. (4,0 điểm)	1. (2,0đ)	Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình $8\cos^3 x = 6\cos x + \sqrt{2}\cos x + 2$ (1) trên đoạn $[0; \pi]$.								
		Ta có (1) $\Leftrightarrow 8\cos^3 x - 6\cos x = \sqrt{2}(\cos x + 1)$	0.25							
		$\Leftrightarrow 2(4\cos^3 x - 3\cos x) = \sqrt{4\cos^2 \frac{x}{2}}$	0.25							
		$\Leftrightarrow 2\cos 3x = 2\cos \frac{x}{2}$ (vì $x \in [0; \pi]$, $\cos \frac{x}{2} \geq 0$)	0.5							
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{x}{2} + k2\pi \\ 3x = -\frac{x}{2} + n2\pi \end{cases} (k, n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{4\pi}{5} \\ x = n\frac{4\pi}{7} \end{cases} (k, n \in \mathbb{Z})$	0.5							
		Vì $x \in [0; \pi]$ nên ta được $x = 0, x = \frac{4\pi}{5}, x = \frac{4\pi}{7}$.	0.5							
	2. (2,0đ)	Bạn Anh viết một dãy các ký tự ngẫu nhiên từ trái sang phải trên hàng ngang vào một tấm bìa (mỗi tấm bìa là một dãy các ký tự). Dãy ký tự gồm 4 chữ cái và 3 chữ số. Hai chữ cái đầu được lấy từ tập $\{Q; T; X; L\}$. Hai chữ cái tiếp theo được lấy từ tập $\{G; V; Đ; M; C\}$. Ba ký tự chữ số được lấy từ tập $\{1; 4; 3\}$. Mỗi ký tự chỉ được viết đúng một lần từ các tập nêu trên. Bạn Lan chọn ngẫu nhiên một tấm bìa mà bạn Anh đã viết. Tính xác suất để bạn Lan lấy được tấm bìa có ghi một trong các từ “QT”; “XL”; “GM”; “VĐ”; “CV” hoặc “314”.								
		Bước 1: Chọn 2 chữ cái đầu từ $\{Q; T; X; L\}$ rồi 2 chữ cái tiếp theo từ $\{G; V; Đ; M; C\}$ xếp thành một dãy, có $A_4^2.A_5^2 = 240$. (Ví dụ minh họa 1 trường hợp hình dưới bên dưới)	0.25							
<table><tr><td>Q</td><td>T</td><td>G</td><td>Đ</td></tr><tr><td>(1)</td><td>(2)</td><td>(3)</td><td>(4)</td></tr></table>		Q	T	G	Đ	(1)	(2)	(3)	(4)	
Q		T	G	Đ						
(1)		(2)	(3)	(4)						
Bước 2: Lúc này, có 5 chỗ để chèn số vào. TH1: Ba chữ số rời nhau, không có hai số nào đứng kề nhau, có $A_5^3 = 60$. TH2: Có đúng 2 chữ số liền kề, 1 chữ đứng riêng có $A_3^2.1.A_5^2 = 120$. TH3: Ba chữ số đứng cạnh nhau, có $5.3! = 30$.		0.25								
Từ các ý trên, ta có $ \Omega = 240.(60 + 120 + 30) = 50400$.		0.25								
Gọi A_1 là biến cố lấy được tấm bìa ghi “QT” hoặc “XL”. Gọi A_2 là biến cố lấy được tấm bìa ghi “GM” hoặc “VĐ” hoặc “CV”. Gọi A_3 là biến cố lấy được tấm bìa ghi “143”.		0.25								
Tính $ A_1 $: Chọn QT hoặc XL có 2 cách. Chọn 2 kí tự chữ còn lại có A_5^2 cách. Xếp 3 kí tự số: $4.3! + A_3^2.A_4^2 + A_4^3$	0.25									

		Suy ra $A_1 = 2.A_5^2.(4.3! + A_3^2.A_4^2 + A_4^3) = 4800$ Tính A_2: Chọn GM, VĐ, CV có 3 cách. Chọn 2 kí tự chữ còn lại có A_4^2 cách. Xếp 3 kí tự số: $4.3! + A_3^2.A_4^2 + A_4^3$ Suy ra $A_2 = 3.A_4^2.(4.3! + A_3^2.A_4^2 + A_4^3) = 4320$	
		Tương tự: $A_3 = A_4^2.A_5^2.5 = 1200$. $A_1 \cap A_2 = 2.3.(3.3! + A_3^2.A_3^2 + 3!) = 360$ $A_1 \cap A_3 = 2.A_5^2.4 = 160$ $A_2 \cap A_3 = 3.A_4^2.4 = 144$. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 2.3.3 = 18$.	0.25
		Ta có: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 + A_2 + A_3 - A_1 \cap A_2 - A_1 \cap A_3 - A_2 \cap A_3 + A_1 \cap A_2 \cap A_3$ $= 4800 + 4320 + 1200 - 360 - 160 - 144 + 18 = 9674$	0.25
		Xác suất $P = \frac{9674}{50400} = \frac{691}{3600}$. ----- Lưu ý: Nếu trường hợp học sinh hiểu theo hướng tính $n(\Omega) = A_4^2.A_5^2.3! = 1440$, và tính các trường hợp không xuất hiện “QT”; “XL”; “GM”; “VĐ”; “CV” và “314” là $(A_4^2 - 2)(A_5^2 - 3).(3! - 1) = 850$ Các trường hợp thuận lợi là $1440 - 850 = 590$. Thì học sinh được 50% điểm câu này, tức là được 1,0 điểm.	0.25
Bài 3. (3,0 điểm)	1.0 (1,5đ)	Cho dãy số (x_n) xác định như sau $x_1 = 7; x_{n+1} = 9x_n^3 - 9x_n^2 + 3x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát x_n .	
		Đặt $x_n = \frac{u_n}{3}$, ta được dãy (u_n) như sau:	0.25
		$u_1 = 21; \frac{u_{n+1}}{3} = \frac{u_n^3}{3} - u_n^2 + u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0.25
		Ta có	
		$u_{n+1} = u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = u_n^3 - 3u_n^2 + 3u_n - 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^3$.	0.25
		Suy ra $u_n - 1 = (u_{n-1} - 1)^3 = (u_{n-2} - 1)^{3^2} = \dots = (u_1 - 1)^{3^{n-1}} = 20^{3^{n-1}}$.	0.25
		Từ đó, $u_n = 20^{3^{n-1}} + 1$	0.25
		$\Rightarrow x_n = \frac{20^{3^{n-1}} + 1}{3}$.	0.25
	2. (1,5đ)	Hỏi có bao nhiêu cách chia tập hợp số $X = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$ thành ba tập con tách rời nhau để không tập nào trong số chúng chứa một cặp số tự nhiên liên tiếp?	
		Giả sử A là tập con của X chứa số 1.	0.25
		Khi đó số 2 phải ở tập khác tập A , ta gọi nó là tập B .	0.25
		Số 3 không thể ở tập B , nếu nó ở tập A thì khi đó tập thứ ba là tập rỗng (lúc này 1 tập tập số chẵn, 1 tập số lẻ và 1 tập rỗng)	0.25

		Hoặc số 3 thuộc tập thứ ba khác A, gọi là tập C, tức là số 3 có 2 sự lựa chọn.	0.25
		Lập luận tương tự số 4 cũng chỉ có 2 sự lựa chọn. ...	0.25
		Số 2022 cũng chỉ có 2 lựa chọn.	
		Áp dụng quy tắc nhân ta có $1 \times 1 \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{2022-3+1} = 2^{2020}$ cách chia thỏa yêu cầu bài toán.	0.25
Bài 4. (3,5 điểm)	1. (2,0đ)	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + bc + ca = 3$ và $c^2 + ab \leq 2ca$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a^2 + 2b + 2c$.	
		Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có $\frac{a^4}{a^2} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a^2 + b + c)^2}{a^2 + bc + ca} = \frac{(a^2 + b + c)^2}{3}$	0.5
		$\Rightarrow a^2 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \geq \frac{(a^2 + b + c)^2}{3} + 3 \stackrel{AM-GM}{\geq} 2(a^2 + b + c)$	0.25
		$\Rightarrow T = a^2 + 2b + 2c \leq \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3 \quad (1)$	0.25
		Lại có $c^2 + ab \leq 2ca \Leftrightarrow \frac{c}{a} + \frac{b}{c} \leq 2 \quad (2)$	0.25
		Từ (1) và (2) suy ra $T \leq 5$.	0.25
		Khi $a = b = c = 1$ ta có $T = 1^2 + 2.1 + 2.1 = 5$.	0.25
		Vậy giá trị lớn nhất của T bằng 5.	0.25
	2. (1,5đ)	Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thỏa $\begin{cases} f(3-2x) + 3g(3-2x) = 4 + \frac{2}{3-2x} & (1) \\ f\left(\frac{2}{x}\right) - g\left(\frac{2}{x}\right) = -x & (2) \end{cases}$, với mọi số thực $x \neq \frac{3}{2}, x \neq 0$. Tính $S = 2022.f(2022) + 2023.g(2023)$	
		Trong (1) thay x bởi $\frac{3-x}{2}$ ta có $f(x) + 3g(x) = 4 + \frac{2}{x} \quad (x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}) \quad (3)$	0.25
		Trong (2) thay x bởi $\frac{2}{x}$ được $f(x) - g(x) = -\frac{2}{x} \quad (x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}, x \neq \frac{4}{3}) \quad (4)$	0.25
		Từ (3) và (4) suy ra $4f(x) = 4 - \frac{4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}, x \neq \frac{4}{3}$	0.25
		$\Leftrightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{x}, \forall x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}, x \neq \frac{4}{3}.$ Và $g(x) = 1 + \frac{1}{x}, \forall x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}, x \neq \frac{4}{3}.$ (Thiếu các điều kiện $\forall x \neq 0, x \neq \frac{3}{2}, x \neq \frac{4}{3}$ thì không chấm bước này).	0.25
		Thử lại với $f(x) = 1 - \frac{1}{x}, g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ thế vào hệ đã cho ta thấy thỏa.	0.25

		$S = 2022.f(2022) + 2023.g(2023) .$ $S = 2022.\left(1 - \frac{1}{2022}\right) + 2023\left(1 + \frac{1}{2023}\right) = 4045 .$	0.25
Bài 5. (4,5 điểm)	1a. (1,5đ)	Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho điểm $M(-2;1)$. a) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và hợp với trục Ox một góc 60° .	
		Từ đề bài ta có hệ số góc của đường thẳng Δ là $\begin{cases} k_1 = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ k_2 = \tan 120^\circ = -\sqrt{3} \end{cases}$.	0.5
		Đường Δ đi qua điểm $M(-2;1)$ và có hệ số góc như trên, có phương trình là: $\begin{cases} \Delta_1 : y = \sqrt{3}(x+2)+1 \\ \Delta_2 : y = -\sqrt{3}(x+2)+1 \end{cases}$	0.5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 : y = \sqrt{3}x + 1 + 2\sqrt{3} \\ \Delta_2 : y = -\sqrt{3}x + 1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$	0.5
	1b (1,0đ)	b) Đường thẳng d qua M và cắt hai tia Ox', Oy lần lượt tại A, B . Viết phương trình đường thẳng d sao cho tam giác OAB có diện tích nhỏ nhất.	
		Gọi $A(a;0)$, $B(0;b)$ ($a < 0, b > 0$). Phương trình $AB : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.	0.25
		Điểm $M(-2;1)$ thuộc đường thẳng AB nên $1 = \frac{-2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{(-a)} + \frac{1}{b} \stackrel{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{\frac{2}{(-a)b}} \Rightarrow 1 \geq \frac{8}{(-a)b} \Rightarrow \frac{(-a)b}{2} \geq 4 \Leftrightarrow S \geq 4 .$	0.25
		Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} \frac{2}{-a} = \frac{1}{b} \\ (-a)b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 2 \end{cases}$. Diện tích tam giác OAB nhỏ nhất bằng 4 khi $a = -4, b = 2$.	0.25
		Suy ra $d : x - 2y + 4 = 0$.	0.25
	2. (2,0đ)	Cho hai đường tròn (O_1, R_1) và (O_2, R_2) (bán kính $R_1 < R_2$) cắt nhau tại hai điểm A, B phân biệt và điểm O_1 nằm ngoài (O_2) . Điểm M là điểm chính giữa cung $\widehat{AB}$ của (O_1) (M nằm bên trong (O_2)). Một dây cung không phải là đường kính, MP của (O_1) cắt (O_2) tại điểm Q (Q nằm trong (O_1)) và điểm còn lại tại R . Gọi t_P, t_M lần lượt là tiếp tuyến của (O_1) tại điểm P, M và t_Q là tiếp tuyến của đường tròn (O_2) tại Q . Gọi F là giao điểm của MP và AB , hai điểm $S, T \in (O_2)$ sao cho $SR \parallel AB$, $RT \parallel t_P$. Chứng minh rằng Q là điểm chính giữa cung $\widehat{TQS}$ của (O_2) và đường tròn ngoại tiếp tam giác được tạo bởi ba đường thẳng t_P, t_Q và AB tiếp xúc với đường tròn (O_2) . Gọi $X = t_P \cap AB, Y = AB \cap t_Q, Z = t_P \cap t_Q$.	

	Vì $RT \parallel t_p \Rightarrow \widehat{TRP} = \widehat{RPX}$ (so le trong) Và $SR \parallel AB \Rightarrow \widehat{SRP} = \widehat{AFP}$ (đồng vị). 	0.5
	M là trung điểm cung $\widehat{AB}$ và t_M là tiếp tuyến với đường tròn (O_1). $\Rightarrow t_M \parallel AB$. Do đó $\widehat{AFP} = \widehat{(t_M, RP)} = \widehat{RPX}$ (tiếp tuyến, dây cung). $\widehat{RPX} = \widehat{AFP}$ nên $\widehat{TRQ} = \widehat{SRQ}$. Do đó, Q là điểm chính giữa của cung $\widehat{TQS}$.	0.25
	Từ đây suy ra tiếp tuyến tại Q là $t_Q \parallel ST$ (cùng vuông góc với O_2Q) Do đó ΔRST và ΔXYZ có các cặp cạnh tương ứng song song, nên chúng đồng dạng và có phép vị tự V tỉ số k nào đó biến tam giác này thành tam giác kia.	0.25
	Gọi D là giao điểm của XR và (O_2). Ta chứng minh D là tâm vị tự. Vì ΔXPF cân tại X nên $XF^2 = XP^2 = XA \cdot XB = XD \cdot XR$ Nên $\frac{XF}{XD} = \frac{XR}{XF} \Rightarrow \Delta XDF \sim \Delta XFR$	0.25
	Suy ra $\widehat{DFX} = \widehat{XRF} = \widehat{DRQ} = \widehat{DQY} \Rightarrow$ Bốn điểm Y, Q, F, D thuộc một đường tròn. Ta có $\widehat{SDQ} + \widehat{SRQ} = 180^\circ$.	0.25
	Mà $\widehat{SRQ} = \widehat{YFQ} = \widehat{YDQ}$ (cùng chắn cung XD). Từ đó suy ra $\widehat{SDQ} + \widehat{YDQ} = 180^\circ$. Hay ba điểm Y, D, S thẳng hàng và D nằm giữa Y và S.	0.25
	Từ đây suy ra D là tâm vị tự của V. Phép vị tự V biến ΔRST thành ΔXYZ, nên biến đường tròn (O_2) thành đường tròn ngoại tiếp tam giác (XYZ). Mà D thuộc (O_2) nên hai đường tròn này tiếp xúc với nhau. Ta được điều phải chứng minh.	0.25

-----HẾT-----