

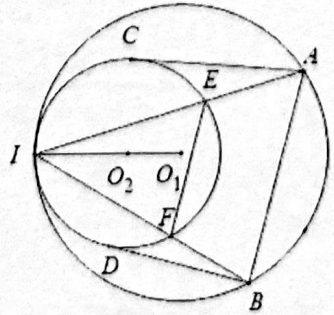
Bài 1	Nội dung diễn đạt	Thang điểm	Ghi chú
Đề	Giải hệ phương trình trên tập số thực: $\begin{cases} 2x = y(1-x^2) & (1) \\ 2y = z(1-y^2) & (2) \\ 2z = x(1-z^2) & (3) \end{cases}$		
	Thấy $x = \pm 1$ không là nghiệm của (1). $y = \pm 1$ không là nghiệm của (2). $z = \pm 1$ không là nghiệm của (3).	0,5	
	Khi $x \neq \pm 1$, ta có: $y = \frac{2x}{1-x^2}$	0,5	
	Đặt $x = \tan \alpha$, $(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}; \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4})$.	0,5	
	Khi đó: $y = \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - (\tan^2 \alpha)} = \tan 2\alpha$.	0,5	
	Từ (2) suy ra: $z = \tan 4\alpha$. Từ (3) suy ra: $x = \tan 8\alpha$	0,5 0,5	
	Vậy $\tan 8\alpha = \tan \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{7} (k \in \mathbb{Z})$	0,5	
	Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}; \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4}$ nên hệ có nghiệm là: $(0; 0; 0)$,	0,5	
	$(\tan \frac{\pi}{7}; \tan \frac{2\pi}{7}; \tan \frac{4\pi}{7})$ và các hoán vị;	0,5 0,25	
	$(\tan \frac{-\pi}{7}; \tan \frac{-2\pi}{7}; \tan \frac{-4\pi}{7})$ và các hoán vị.	0,5 0,25	

Bài 2	Nội dung diễn đạt	Thang điểm	Ghi chú
Đề	Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 5u_n + 2}{u_n^2 + u_n + 1}; n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn (và tìm giới hạn đó).		
	Ta thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và từ: $u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 5u_n + 2}{u_n^2 + u_n + 1} = 2 + \frac{3u_n}{u_n^2 + u_n + 1} = 3 - \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1} = 3 - \frac{(u_n - 1)^2}{u_n^2 + u_n + 1}$	0,25	
	Suy ra: $2 < u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25	
	Xét hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + x + 1}, x \in (2; 3)$	0,25	

$f'(x) = \frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{3(1 - x^2)}{(x^2 + x + 1)^2} < 0, \forall x \in (2; 3)$	0,25	
Vậy $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(2; 3)$.	0,25	
Dãy số đã cho có thể viết ở dạng: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$	0,25	
Ta thấy $u_3 = \frac{35}{13}$		
Nên: $1 = u_1 < u_3 \Rightarrow f(u_1) > f(u_3) \Rightarrow u_2 > u_4 \Rightarrow f(u_2) < f(u_3) \Rightarrow u_3 < u_5$	0,5	
Tương tự ta suy ra: $u_1 < u_3 < u_5 < \dots$. Vậy dãy (u_{2n+1}) tăng và bị chặn trên bởi 3 nên tồn tại giới hạn hữu hạn là $a \in [2; 3]$.	0,5	
$u_2 > u_4 > u_6 > \dots$. Vậy dãy (u_{2n}) giảm và bị chặn dưới bởi 2 nên tồn tại giới hạn hữu hạn là $b \in [2; 3]$.	0,5	
Ta có: $\begin{cases} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \end{cases}$. Chuyển qua giới hạn ta có: $\begin{cases} a = f(b) \\ b = f(a) \end{cases}$	0,25	
Ta có: $a - b = f(b) - f(a) \Leftrightarrow a - b = \frac{2b^2 + 5b + 2}{b^2 + b + 1} - \frac{2a^2 + 5a + 2}{b^2 + b + 1}$	0,25	
$\Leftrightarrow a - b = 3 \left(\frac{b}{b^2 + b + 1} - \frac{a}{a^2 + a + 1} \right) = \frac{3(a - b)(ab - 1)}{(b^2 + b + 1)(a^2 + a + 1)}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b & (1) \\ 3(ab - 1) = (a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1) & (2) \end{cases}$	0,25	
Do $3(ab - 1) \leq 3.8 < 7.7 \leq (a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)$, nên (2) không xảy ra.	0,25	
Xét (1), $a = b$, vậy $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = a$, khi đó a phải thỏa: $a = \frac{2a^2 + 5a + 2}{a^2 + a + 1} \Leftrightarrow a^3 - a^2 - 4a - 2 = 0$	0,25	
$\Leftrightarrow a = -1 \vee a = 1 - \sqrt{3} \vee a = 1 + \sqrt{3}$	0,25	
Do $a \in [2; 3]$ nên ta chọn: $a = 1 + \sqrt{3}$.	0,25	
Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim u_n = 1 + \sqrt{3}$.	0,25	

Bài 3	Nội dung diễn đạt	Thang điểm	Ghi chú
Đề	Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho: $pq \mid (2^p + 2^q)$		
	Xét $p, q > 2$. Đặt $p = 2^h \cdot n + 1; q = 2^k \cdot m + 1$, trong đó m, n là các số nguyên dương lẻ, $h, k \in \mathbb{Z}^+$.	0,25	
	Ta có $pq \mid 2^p + 2^q \Rightarrow 0 \equiv 2^p + 2^q \equiv 2^p + 2 = 2(2^{p-1} + 1) \pmod{q}$ (theo ĐL Fermat nhỏ)	0,25	
	$\Rightarrow 2^{p-1} \equiv -1 \pmod{q} \Rightarrow 2^{2^h \cdot n} \equiv -1 \pmod{q} \quad (1)$	0,25	
	Đặt $x = 2^n$. Từ (1) ta được $x^{2^h} \equiv -1 \pmod{q}$ $\Rightarrow x^{2^{h+1}} = (x^{2^h})^2 \equiv 1 \pmod{q}$ và $x^{2^h} \not\equiv 1 \pmod{q}$	0,25	
	Do đó: $\text{ord}_q(x) = 2^{h+1}$ ($\text{ord}_q(x)$ là cấp của x modulo q , là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa $x^{\text{ord}_q(x)} \equiv 1 \pmod{q}$)	0,5	

	Ta chứng minh tính chất sau: $\forall s \in \mathbb{Z}^+, x^s \equiv 1(\text{mod } q) \Leftrightarrow \text{ord}_q(x) s$ (2)	0,5	
	($\Leftarrow$) Giả sử $\text{ord}_q(x) s$, tức là $s = \text{ord}_q(x) \cdot t$, do đó $x^s = (x^{\text{ord}_q(x)})^t \equiv 1(\text{mod } q)$	0,25	
	($\Rightarrow$) Giả sử $s \in \mathbb{Z}^+, x^s \equiv 1(\text{mod } q)$. Ta viết $s = \text{ord}_q(x) \cdot t + r$ ($0 \leq r < \text{ord}_q(x)$). Khi đó: $1 \equiv x^s = x^{\text{ord}_q(x) \cdot t} \cdot x^r \equiv x^r(\text{mod } q)$ Do tính chất nhỏ nhất của $\text{ord}_q(x)$ và $0 \leq r < \text{ord}_q(x)$ nên $r = 0$. Tức là $\text{ord}_q(x) s$.	0,25	
	Theo định lý Fermat nhỏ $x^{q-1} \equiv 1(\text{mod } q)$. Theo (2) ta có $\text{ord}_q(x) q-1$. Tức là: $2^{h+1} = \text{ord}_q(x) q-1 = 2^k \cdot m \Rightarrow h+1 \leq k$.	0,5	
	Tương tự ta có: $k+1 \leq h$.	0,25	
	Suy ra: $h+2 \leq k+1 \leq h$ (mâu thuẫn)	0,25	
	Vậy $p=2$ hoặc $q=2$.	0,25	
	Nếu $q=2$ thì $0 \equiv 2^p + 2^q = 2^p + 4 \equiv 2 + 4 = 6(\text{mod } p) \Rightarrow p=2 \vee p=3$.	0,5	
	Nếu $p=2$ thì $0 \equiv 2^p + 2^q = 2^q + 4 \equiv 2 + 4 = 6(\text{mod } q) \Rightarrow q=2 \vee q=3$.	0,5	
	Vậy $(p; q) = (2; 2), (2; 3), (3; 2)$.	0,25	

Bài 4	Nội dung diễn đạt	Thang điểm	Ghi chú
Đề	Trong tam giác ABC , đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Một đường tròn (w) đi qua A và tiếp xúc với BC tại D cắt các đường thẳng BF, CE tương ứng tại K và L . Đường thẳng đi qua E và song song với DL cắt đường thẳng đi qua F và song song với DK tại P . Đặt R_1, R_2, R_3, R_4 lần lượt là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác AFD, AED, FPD, EPD . Chứng minh rằng $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$.		
	Trước hết ta chứng minh bổ đề: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1), (O_2; R_2)$ tiếp xúc trong tại I ($R_1 > R_2$). Gọi A, B là hai điểm bất kì thuộc $(O_1; R_1)$. Vẽ các tiếp tuyến AC, DB của $(O_2; R_2)$, ($C, D \in (O_2; R_2)$). Khi đó ta có: $\frac{IA}{IB} = \frac{AC}{BD}$. 	0,5	

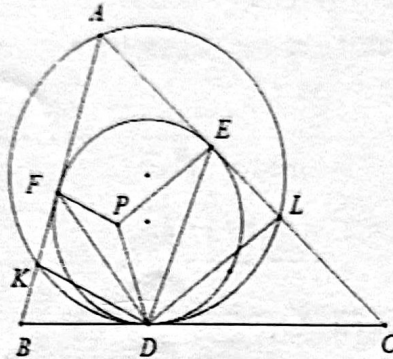
Chứng minh:

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của IA, IB với $(O_1; R_1)$. Dễ thấy rằng : $EF \parallel AB$.

Ta có : $\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{AE \cdot AI}{BF \cdot BI} = \frac{AI^2}{BI^2}$. (do $EF \parallel AB$ nên $\frac{AI}{BI} = \frac{AE}{BF}$), hay $\frac{IA}{IB} = \frac{AC}{BD}$.

0,5

Ta quay lại bài toán. Có hình vẽ :



0,25

Áp dụng định lý sin ta có :

$$R_1 = \frac{AD}{2 \sin \widehat{AFD}} = \frac{AD}{2 \sin \widehat{KFD}}; R_2 = \frac{AD}{2 \sin \widehat{AED}} = \frac{AD}{2 \sin \widehat{LED}}$$

0,5+0,5

$$R_3 = \frac{PD}{2 \sin \widehat{PFD}} = \frac{PD}{2 \sin \widehat{FDK}}; R_4 = \frac{PD}{2 \sin \widehat{PED}} = \frac{PD}{2 \sin \widehat{EDL}}$$

0,5+0,5

$$\text{Xét tỉ số : } A = \frac{R_1 \cdot R_4}{R_2 \cdot R_3} = \frac{\sin \widehat{LED} \cdot \sin \widehat{FDK}}{\sin \widehat{EDL} \cdot \sin \widehat{KFD}}$$

0,5

Áp dụng định lý sin cho các tam giác DFK, DEL , ta có: $A = \frac{FK}{DK} \cdot \frac{DL}{EL}$.

0,5

Mặt khác, theo bổ đề bên trên, ta có: $\frac{DK}{DL} = \frac{KF}{LE}$, nên suy ra: $A = 1$.

0,5

Vậy $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$.

0,25

--- Hết ---