

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN THI: TOÁN

Đề thi gồm 02 trang

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 08/12/2020

ĐỀ BÀI

Câu 1: Giải phương trình $\cos 2x \cdot \sin x + 2 \cos^3 x = \sin x + 2 \cos x$

Câu 2: Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển nhị thức Niu-ton của $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^3}\right)^n$ biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

Câu 3: Cho hình nón đỉnh S có đường cao SO . Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a , $\widehat{SAO} = 30^\circ$ và $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi C' là trung điểm của SC . Mặt phẳng đi qua AC' và song song với BD cắt SB tại B' và cắt SD tại D' . Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

Câu 5: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x$ với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 và biểu thức $A = x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của SD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CI .

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $AA' = a$. Hình chiếu của A đỉnh trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm của $A'B'$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' . Tính $\cos \varphi$.

Câu 9: Cho hai số thực x, y khác 0, biết: $\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^{\frac{1}{y}} = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^{y-2} = (y^2+1)^x$. Tính giá trị biểu thức $P = 2^x - 2^{-x} - 2x + 2^y - 2^{-y} - 2y$.

Câu 10: Giải phương trình $\log_4 x^2 + \log_2 (5-x) = \log_8 (3x+1)^3$

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) , đường thẳng $(d): y = mx + 1$ và điểm $K(3;10)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;1)$ và trọng tâm của tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 3$.

Câu 12: (1,25 điểm). Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số $y = 2\ln(x+1) - (m+1)\ln(2-x) - m^2x$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 13: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y = \sqrt[3]{x+y} & (1) \\ y+3 = x+2\sqrt{x} & (2) \end{cases}.$$

Câu 14: Chọn ngẫu nhiên ba số đôi một khác nhau từ tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 100\}$ gồm 100 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để chọn được ba số là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 15: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Các đường thẳng BB' , BA' , CA' cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Điểm M nằm trên cạnh AA' . Mặt phẳng (α) qua M và song song với (ABC) lần lượt cắt các đoạn thẳng AB' , BC' , CA' tại các điểm D, E, F . Biết rằng thể tích khối tứ diện $A'DEF$ bằng $\frac{1}{18}a^3$, hãy tính tỉ số $\frac{MA}{MA'}$.

Câu 16: Xét 3 số thực dương a, b, c thay đổi. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}.$$

_____ **HẾT** _____

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: Giải phương trình $\cos 2x \cdot \sin x + 2 \cos^3 x = \sin x + 2 \cos x$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\cos 2x \cdot \sin x + 2 \cos^3 x &= \sin x + 2 \cos x \\ \Leftrightarrow (2 \cos^2 x - 1) \cdot \sin x + 2 \cos^3 x &= \sin x + 2 \cos x \\ \Leftrightarrow (2 \cos^2 x - 1) \cdot \sin x + 2 \cos^3 x &= \sin x + 2 \cos x \\ \Leftrightarrow 2 \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \cos^3 x &= 2 \sin x + 2 \cos x \\ \Leftrightarrow \cos^2 x (\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\cos^2 x - 1) (\sin x + \cos x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \sin^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Câu 2: Tìm hệ số của số hạng chứa x^9 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^3} \right)^n$ biết rằng

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3).$$

Lời giải

ĐK: $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n &= 7(n+3) \\ \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+1)!3!} - \frac{(n+3)!}{n!3!} &= 7(n+3) \\ \Leftrightarrow (n+4)(n+3)(n+2) - (n+3)(n+2)(n+1) &= 42(n+3) \\ (n+3)(n^2 + 6n + 8 - n^2 - 3n - 2 - 42) &= 0 \\ \Leftrightarrow (n+3)(3n - 36) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3(ktm) \\ n = 1(tm) \end{cases}\end{aligned}$$

Khi đó ta có $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^3} \right)^{12}$ có số hạng tổng quát là:

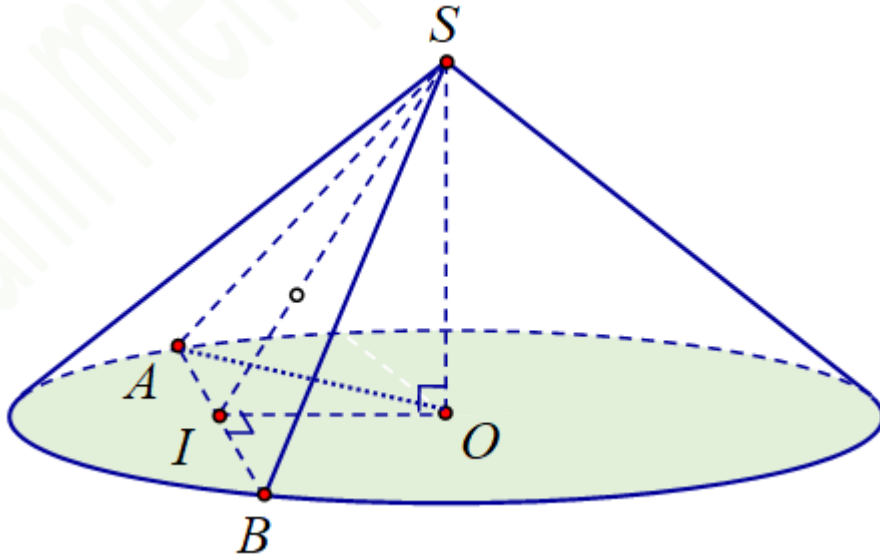
$$T_{k+1} = C_{12}^k \left(\frac{1}{x^3} \right)^k \left(\sqrt{x^3} \right)^{12-k} = C_{12}^k \cdot x^{-3k} \cdot x^{\frac{3}{2}(12-k)} = C_{12}^k \cdot x^{18 - \frac{9}{2}k}$$

Số hạng chứa $x^9 \Leftrightarrow 18 - \frac{9}{2}k = 9 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^9 là C_{12}^9 .

Câu 3: Cho hình nón đỉnh S có đường cao SO . Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a , $\widehat{SAO} = 30^\circ$ và $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AB . Ta có $OK \perp (SAB) \Rightarrow OI = a$.

Đặt $SO = x$,

Ta có $\Delta SOI : SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$ (1). $\Delta SOA : SA = \frac{SO}{\sin 30^\circ} = 2x$.

Xét tam giác đều $\Delta SAB : SI = \frac{\sqrt{3}SA}{2} = \frac{\sqrt{3}.2x}{2} = x\sqrt{3}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow a^2 + x^2 = 3x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$OA = OA = SO \cdot \cot 30^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}. SA = 2x = a\sqrt{2}$$

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a\sqrt{2} = \pi a^2 \sqrt{3}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$m-1$	$m+1$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$ có hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m-1 \leq 0 < m+1 \Leftrightarrow -1 < m \leq 1$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} 0 < m-1 \\ f(0) \geq f(m+1) \end{cases}$

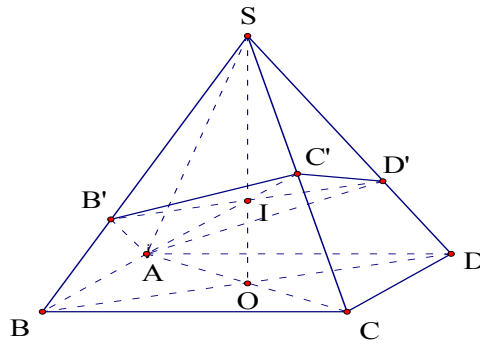
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 2020 \geq (m+1)^3 - 3m(m+1)^2 + 3(m^2-1)(m+1) + 2020 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m^2 - m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 2.$$

Vậy $-1 < m \leq 2$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi C' là trung điểm của SC . Mặt phẳng đi qua AC' và song song với BD cắt SB tại B' và cắt SD tại D' . Tính thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Vì $S.ABCD$ hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ bằng: $S_{ABCD} = a^2$

Ta có $AC = a\sqrt{2} = SA = SC$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $I = B'D' \cap SO$, suy ra A, I, C' thẳng hàng

Trong tam giác SAC , ta có AC' , SO là đường trung tuyến nên I là trọng tâm ΔSAC .

$$\Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vì } B'D' \parallel BD \text{ nên } \frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{V_{SAC'D'}}{V_{SACD}} = \frac{SD'}{SD} \cdot \frac{SC'}{SC} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{V_{SAB'C'D'}}{V_{SABCD}} = \frac{V_{SAB'C'} + V_{SAC'D'}}{V_{SABC} + V_{SACD}} = \frac{V_{SAB'C'}}{2V_{SABC}} + \frac{V_{SAC'D'}}{2V_{SACD}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SAB'C'D'} = \frac{1}{3} V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$$

Câu 5: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$y' = \frac{(2x+2)(x-m) - (x^2 + 2x - m)}{(x-m)^2} = \frac{x^2 - 2mx - m}{(x-m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2mx - m}{(x-m)^2} \geq 0 \quad \forall x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx - m \geq 0 \quad \forall x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \\ m \notin \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{x^2}{2x+1} \quad \forall x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$, có $f'(x) = \frac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$	

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x$ với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 và biểu thức $A = x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Ta có $y' = 2x^2 + 2(m+1)x + (m^2 + 4m + 3)$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình $2x^2 + 2(m+1)x + (m^2 + 4m + 3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt,

$$\text{hay } \Delta' = (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 < 0 \Leftrightarrow m \in (-5; -1).$$

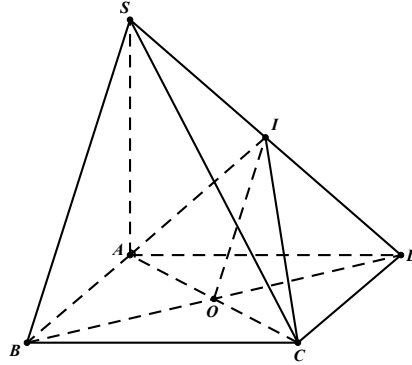
Theo định lý Vi-et

$$A = x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = \frac{m^2 + 4m + 3}{2} - 2 \cdot (-m - 1) = \frac{m^2 + 8m + 7}{2} = \frac{(m + 4)^2 - 9}{2} \geq \frac{-9}{2}.$$

Dấu bằng khi $m = -4$ thỏa mãn.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của SD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CI .

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Để thấy $IO \parallel SB \Rightarrow SB \parallel (AIC) \Rightarrow d(SB, CI) = d(SB, (AIC)) = d(S, (AIC))$.

$$\text{Ta có } V_{SACI} = \frac{1}{2} V_{SACD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} SA \cdot S_{ACD} = \frac{a^3}{12}.$$

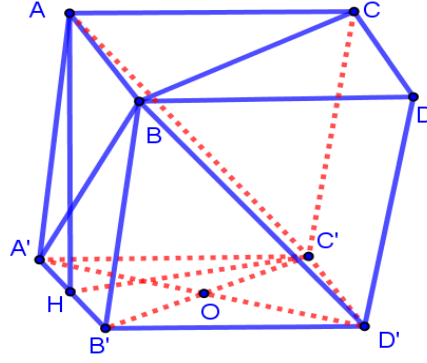
$$\text{Tính được } AC = a\sqrt{2}, \quad IA = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad IC = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Áp dụng công thức Hê rông } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ tính được } S_{\Delta IAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Do đó } d(S, (IAC)) = \frac{3V_{S.IAC}}{S_{\Delta IAC}} = \frac{a}{\sqrt{3}}. \text{ Hay } d(SB, CI) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $AA' = a$. Hình chiếu của A' đỉnh trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm của $A'B'$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AC' . Tính $\cos \varphi$.

Lời giải



Dựng hình lăng trụ tứ giác $ABDC.AB'D'C'$, gọi $O = A'D' \cap B'C'$.

Vì $\triangle A'B'C'$ đều $\Rightarrow A'O = C'H = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'D' = 2A'O = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle AA'H$ vuông tại H có

$$+) AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$+) \tan \widehat{AA'H} = \frac{AH}{A'H} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AA'H} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{A'B'B} = 120^\circ.$$

Xét $\triangle A'B'B$ có $A'B^2 = A'B'^2 + BB'^2 - 2A'B'.BB' \cos 120^\circ = 3a^2 \Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$

Xét $\triangle AHC'$ vuông tại H có $AC' = \sqrt{AH^2 + HC'^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BD' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $\varphi = (\widehat{A'B; AC'}) = (\widehat{A'B; BD'})$.

$$\text{Xét } \triangle A'BD' \text{ có } \cos \widehat{A'BD'} = \frac{A'B^2 + BD'^2 - A'D'^2}{2A'B.BD'} = \frac{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - (a\sqrt{3})^2}{2.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 9: Cho hai số thực x, y khác 0, biết: $\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{\frac{1}{y}} = \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{y-2} = (y^2+1)^x$. Tính giá trị biểu thức $P = 2^x - 2^{-x} - 2x + 2^y - 2^{-y} - 2y$

Lời giải

Gọi D là trung điểm của KC

$$\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{\frac{1}{y}} = \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{y-2} = (y^2+1)^x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{\frac{1}{y}} = \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{y-2} \\ \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{\frac{1}{y}} = (y^2+1)^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{\frac{1}{y}} = \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{2-y} \\ \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^{\frac{1}{y}} = (y^2+1)^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = 2 - y \\ \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)^{\frac{1}{y}} = (y^2 + 1)^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0 \\ \left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)^{\frac{1}{y}} = (y^2 + 1)^x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \sqrt{x^2 + 1} + x = 2^x \end{cases}$$

$$* \text{ Xét } P = 2^x - 2^{-x} - 2x + 2^y - 2^{-y} - 2y = \sqrt{x^2 + 1} + x - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} - 2x + 2 - \frac{1}{2} - 2$$

$$= \sqrt{x^2 + 1} + x - (\sqrt{x^2 + 1} - x) - 2x - \frac{1}{2}$$

$$= 2x - 2x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } P = -\frac{1}{2}$$

Câu 10: Giải phương trình $\log_4 x^2 + \log_2 (5 - x) = \log_8 (3x + 1)^3$

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x \neq 0 \\ 5 - x > 0 \\ 3x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -\frac{1}{3} < x < 5 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } \log_4 x^2 + \log_2 (5 - x) = \log_8 (3x + 1)^3$$

$$\Leftrightarrow \log_{2^2} x^2 + \log_2 (5 - x) = \log_{2^3} (3x + 1)^3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 |x| + \log_2 (5 - x) = \log_2 (3x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (|x| \cdot (5 - x)) = \log_2 (3x + 1)$$

$$\Leftrightarrow |x| \cdot (5 - x) = 3x + 1 \quad (1)$$

Nếu $-\frac{1}{3} < x < 0$ thì phương trình (1) có dạng

$$(-x) \cdot (5 - x) = 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - \sqrt{17} \\ x = 4 + \sqrt{17} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $-\frac{1}{3} < x < 0$ nên $x = 4 - \sqrt{17}$.

Nếu $0 < x < 5$ thì phương trình (1) có dạng

$$x \cdot (5 - x) = 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Kết hợp với điều kiện } 0 < x < 5 \text{ nên } x = 1$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $\{4 - \sqrt{17}; 1\}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) , đường thẳng $(d): y = mx + 1$ và điểm $K(3;10)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt A, B, C trong đó $A(0;1)$ và trọng tâm của tam giác KBC nằm trên đường thẳng $y = 2x + 3$.

Lời giải

$$\text{Xét phương trình } x^3 - 3x^2 + 1 = mx + 1 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x - m = 0 (*) \end{cases}$$

Để (C) và (d) cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 hay

$$\begin{cases} 9 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < m \neq 0.$$

Gọi các giao điểm của (C) và (d) là $A(0;1), B(x_1; mx_1 + 1), C(x_2; mx_2 + 1)$ và $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \end{cases}$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác KBC , khi đó $G\left(\frac{x_1 + x_2 + 3}{3}; \frac{mx_1 + mx_2 + 12}{3}\right)$ hay $G(2; m+4)$.

Do $G \in (d)$ nên $m + 4 = 7 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn)

Câu 12: (1,25 điểm). Tìm tất cả giá trị thực của m để hàm số $y = 2\ln(x+1) - (m+1)\ln(2-x) - m^2x$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = (-1; 2)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{2}{x+1} + \frac{m+1}{2-x} - m^2.$$

Điều kiện cần: Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$ thì $y'(1) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + m + 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Điều kiện đủ:

+ Với $m = -1$ thì $y' = \frac{2}{x+1} - 1 \Rightarrow y'' = \frac{-2}{(x+1)^2} \Rightarrow y''(1) < 0$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Vậy $m = -1$ không thỏa mãn.

+ Với $m = 2$ thì $y' = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-x} - 4 \Rightarrow y'' = \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{3}{(2-x)^2} \Rightarrow y''(1) = \frac{5}{2} > 0$. Hàm số đạt

cực tiểu tại điểm $x = 1$. Vậy $m = 2$ thỏa mãn.

Tóm lại, có duy nhất một giá trị thực của m thỏa mãn đề bài là $m = 2$.

Câu 13: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y = \sqrt[3]{x+y} & (1) \\ y + 3 = x + 2\sqrt{x} & (2) \end{cases}$. **Lời giải**

+ Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^3 + x = x + y + \sqrt[3]{x+y}$

+ Xét hàm số $g(t) = t^3 + t; g'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall x \in R$ suy ra hàm số đồng biến trên R

$$(1) \Leftrightarrow g(x) = g(\sqrt[3]{x+y}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x+y} \Leftrightarrow x^3 = x + y \Rightarrow y = x^3 - x$$

+ Thay $y = x^3 - x$ vào (2) ta được $x^3 - 2x - 2\sqrt{x} + 3 = 0 \Leftrightarrow a^6 - 2a^2 - 2a + 3 = 0 \ (a = \sqrt{x} \geq 0)$

+ Xét hàm số $f(a) = a^6 - 2a^2 - 2a + 3 \ (a \geq 0)$

$$f'(a) = 6a^5 - 4a - 2; f'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 6a^4 + 6a^3 + 6a^2 + 6a + 2 = 0 (vn) \end{cases}$$

BBT:

a	0	1	
f'(a)		-	0
f(a)			+

Căn cứ BBT ta thấy pt $a^6 - 2a^2 - 2a + 3 = 0$ có duy nhất 1 nghiệm là $a = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là $(1; 0)$.

Câu 14: Chọn ngẫu nhiên ba số đôi một khác nhau từ tập hợp $\{1; 2; 3; \dots; 100\}$ gồm 100 số nguyên dương đầu tiên. Tính xác suất để chọn được ba số là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Ta xét bài toán tổng quát $X = \{1; 2; 3; 4; \dots; n\}$.

Không mất tính tổng quát giả sử ba số được chọn là a, b, c với $a > b > c \geq 1$.

Trường hợp 1:

Khi n là số lẻ ($n = 2m + 1$)

1) Khi a chẵn ($a = 2i$ với i từ 2 đến m) Với $b = i + k$ (k từ 1 đến $i - 1$) thì c chạy từ $i - k + 1$ đến $i + k - 1$ (có $2k - 1$ cách chọn c) $\Rightarrow$ có $s_1 = \sum_{i=2}^m \sum_{k=1}^{i-1} (2k - 1) = \sum_{i=2}^m (i - 1)^2 = \frac{m(m-1)(2m-1)}{6}$ cách

2) Khi a lẻ ($a = 2i + 1$ với i từ 2 đến m) Với $b = i + k$ (k từ 2 đến i) thì c chạy từ $i - k + 2$ đến $i + k - 1$ (có $2k - 2$ cách chọn c) $\Rightarrow$ có $s_2 = \sum_{i=2}^m \sum_{k=2}^i (2k - 2) = \sum_{i=2}^m A_i^2 = \frac{m(m-1)(m+1)}{3}$ cách

Vậy trường hợp 1 có: $s = s_1 + s_2 = \frac{m(m-1)(4m+1)}{6}$ cách.

1) Khi a chẵn ($a = 2i$ với i từ 2 đến m) Với $b = i + k$ (k từ 1 đến $i - 1$) thì c chạy từ $i - k + 1$ đến $i + k - 1$ (có $2k - 1$ cách chọn c) $\Rightarrow$ có $t_1 = \sum_{i=2}^m \sum_{k=1}^{i-1} (2k - 1) = \sum_{i=2}^m (i - 1)^2 = \frac{m(m-1)(2m-1)}{6}$ cách

2) Khi a lẻ ($a = 2i + 1$ với i từ 2 đến $m - 1$) Với $b = i + k$ (k từ 2 đến i) thì c chạy từ $i - k + 2$ đến $i + k - 1$ (có $2k - 2$ cách chọn c) $\Rightarrow$ có $t_2 = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{k=2}^i (2k - 2) = \sum_{i=2}^{m-1} A_i^2 = \frac{m(m-1)(m-2)}{3}$ cách.

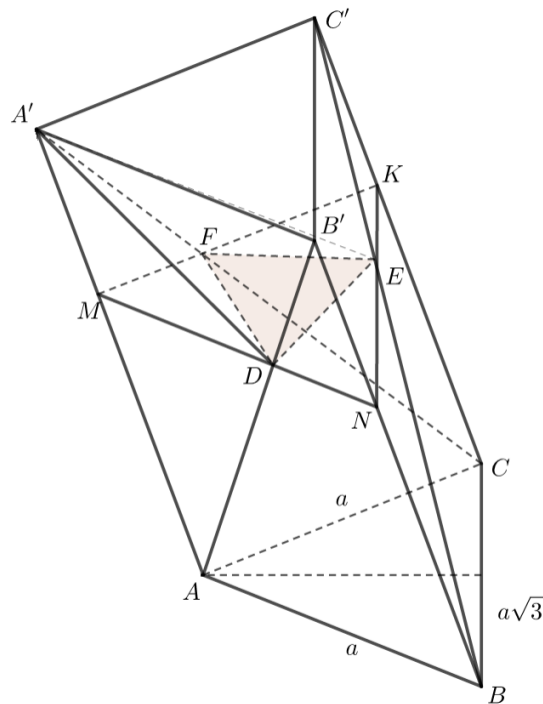
Vậy TH 2 có: $t = t_1 + t_2 = \frac{m(m-1)(4m-5)}{6}$ cách.

Xác suất cần tìm nếu n lẻ ($n = 2m + 1$) là $\frac{s}{C_{2m+1}^3} = \frac{(m-1)(4m+1)}{2(2m+1)(2m-1)} = \frac{1}{2} - \frac{3m}{8m^2 - 2}$.

Xác suất cần tìm nếu n chẵn ($n = 2m$) là $\frac{t}{C_{2m}^3} = \frac{4m-5}{8m-4} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8m-4}$.

Áp dụng vào bài: Với $n = 2m = 100$ thì xác suất cần tìm là $\frac{1}{2} - \frac{3}{8 \cdot 50 - 4} = \frac{65}{132}$.

Câu 15: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Các đường thẳng BB' , BA' , CA' cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Điểm M nằm trên cạnh AA' . Mặt phẳng (α) qua M và song song với (ABC) lần lượt cắt các đoạn thẳng AB' , BC' , CA' tại các điểm D, E, F . Biết rằng thể tích khối tứ diện $A'DEF$ bằng $\frac{1}{18}a^3$, hãy tính tỉ số $\frac{MA}{MA'}$.



Gọi h là chiều cao của lăng trụ.

Suy ra $BB' = BA' = CA' = \frac{h}{\sin 60^\circ}$
 $\Rightarrow AA' = BB' = BA' = CA'$

Xét tứ diện $A'.ABC$ có $BB' = BA' = CA'$ nên chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$$\text{Suy ra } h = R \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2 \sin 120^\circ} \cdot \sqrt{3} = a\sqrt{3}$$

Gọi $h' = d((ABC), (MDF))$ suy ra

$$\begin{aligned} \frac{h'}{h} &= \frac{AM}{AA'} = \frac{MD}{MN} \Rightarrow \frac{MF}{MK} = 1 - \frac{h'}{h} \\ \Rightarrow \frac{S_{\Delta MDF}}{S_{\Delta MNK}} &= \frac{h'}{h} \left(1 - \frac{h'}{h}\right) \Rightarrow S_{\Delta EDF} = S_{\Delta MNK} - 3S_{\Delta MDF} = S_{\Delta MNK} \left(1 - 3 \frac{h'}{h} \left(1 - \frac{h'}{h}\right)\right) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} V_{A'.DEF} &= \frac{1}{3} h' \cdot S_{\Delta DEF} \Rightarrow \frac{1}{18} a^3 = \frac{1}{3} h' \cdot S_{\Delta DEF} \\ \Rightarrow \frac{1}{6} a^3 &= h' \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \sin 120^\circ \cdot \left(1 - 3 \frac{h'}{h} \left(1 - \frac{h'}{h}\right)\right) \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} a &= h' - 3 \frac{h'^2}{h} + 3 \frac{h'^3}{h^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} a^3 &= 3a^2 h' - 3\sqrt{3} a h'^2 + 3h'^3 \\ \Rightarrow h' &= \frac{2\sqrt{3}a}{3} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MA}{MA'} = 2 \end{aligned}$$

Câu 16: Xét 3 số thực dương a, b, c thay đổi. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}.$$

Lời giải

$$3(a^2b + b^2c + c^2a) \leq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow \sum a(a-b)^2 \geq 0.$$

$$\begin{aligned} 3(a^2c + b^2a + c^2b) &\leq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \\ \Rightarrow \sum a^2(b+c) &\leq \frac{2}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \end{aligned}$$

$$P = \sum \frac{a^2}{b+c} + \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}} = \sum \frac{a^4}{a^2(b+c)} + \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}}.$$

$$\geq \frac{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq a^2(b+c)} + \frac{4}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}} \geq \frac{t^2}{\frac{2}{3}t\sqrt{3t}} + \frac{4}{\sqrt{t+1}} = f(t) \geq f(3) = \frac{7}{2}.$$

HẾT