

Bài 1. (3,0 điểm)

a) Rút gọn $A = \sqrt{419 - 40\sqrt{19}} + \sqrt{419 + 40\sqrt{19}}$.

b) Giải phương trình $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$.

c) Biết nghiệm của phương trình $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$ là nghiệm của phương trình $4x^4 + bx^2 + c = 0$. Tìm các số b, c .

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2$.

b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;1)$ và tiếp xúc với (P) .

Bài 3. (1,0 điểm)

Cho hai số a, b phân biệt thỏa mãn $a^2 - 2021a = b^2 - 2021b = c$, với c là một số thực dương.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2021}{c} = 0$.

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AC . Gọi I là một điểm thuộc đoạn OC (I khác O và C). Qua I kẻ đường vuông góc với AC cắt BC tại E và AB kéo dài tại D . Gọi K là điểm đối xứng của C qua điểm I .

a) Chứng minh rằng các tứ giác $BDCI$ và $AKED$ nội tiếp.

b) Chứng minh $IC \cdot IA = IE \cdot ID$.

Bài 5. (1,0 điểm)

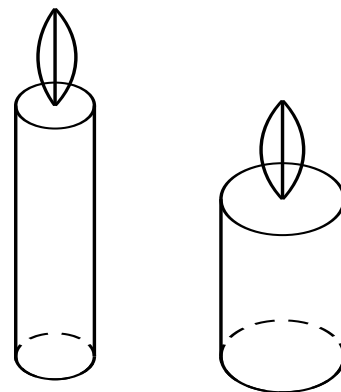
Cho tam giác ABC đều có diện tích 36 cm^2 . Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CA sao cho $MN \perp BC; NP \perp AC; PM \perp AB$. Chứng tỏ rằng tam giác MNP đều và tính diện tích tam giác MNP .

Bài 6. (1,0 điểm)

Hai ngọn nến hình trụ có chiều cao và đường kính khác nhau được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Ngọn nến thứ nhất cháy hết trong 6 giờ, ngọn nến thứ hai cháy hết trong 8 giờ. Hai ngọn nến được thắp sáng cùng lúc, sau 3 giờ chúng có cùng chiều cao.

a) Tìm tỉ lệ chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến.

b) Biết tổng chiều cao của hai ngọn nến là 63 cm. Tính chiều cao của mỗi ngọn nến.



===== Hết =====

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (3,0 điểm)

a) Rút gọn $A = \sqrt{419 - 40\sqrt{19}} + \sqrt{419 + 40\sqrt{19}}$.

b) Giải phương trình $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$.

c) Biết nghiệm của phương trình $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$ là nghiệm của phương trình $4x^4 + bx^2 + c = 0$. Tìm các số b, c .

Lời giải

a) Rút gọn

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{419 - 40\sqrt{19}} + \sqrt{419 + 40\sqrt{19}} \\ &= \sqrt{400 - 2 \cdot 20 \cdot \sqrt{19} + 19} + \sqrt{400 + 2 \cdot 20 \cdot \sqrt{19} + 19} = \sqrt{(20 - \sqrt{19})^2} + \sqrt{(20 + \sqrt{19})^2} \\ &= |20 - \sqrt{19}| + |20 + \sqrt{19}| = 20 - \sqrt{19} + 20 + \sqrt{19} = 40. \end{aligned}$$

Vậy $A = 40$.

b) Giải phương trình $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$.

$$\Delta = (2\sqrt{3} + 3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 12 + 9 + 12\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 12 + 9 - 12\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 3)^2 > 0$$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

$$x_1 = \frac{-(2\sqrt{3} + 3) + (2\sqrt{3} - 3)}{2 \cdot 2} = \frac{-3}{2}; \quad x_2 = \frac{-(2\sqrt{3} + 3) - (2\sqrt{3} - 3)}{2 \cdot 2} = -\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ -\sqrt{3}; \frac{-3}{2} \right\}$.

c) Biết nghiệm của phương trình $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$ là nghiệm của phương trình $4x^4 + bx^2 + c = 0$. Tìm các số b, c .

Xét phương trình $4x^4 + bx^2 + c = 0$, có hai nghiệm là $-\sqrt{3}; \frac{-3}{2}$ nên ta có:

$$\begin{cases} 4(-\sqrt{3})^4 + b(-\sqrt{3})^2 + c = 0 \\ 4\left(\frac{-3}{2}\right)^4 + b\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot 9 + b \cdot 3 + c = 0 \\ 4 \cdot \frac{81}{16} + b \cdot \frac{9}{4} + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3b + c = -36 \\ 9b + 4c = -81 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9b + 3c = -108 \\ 9b + 4c = -81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 27 \\ b = \frac{-36 - c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 27 \\ b = -21 \end{cases}.$$

Vậy $b = -21; c = 27$ là các giá trị cần tìm.

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2$.

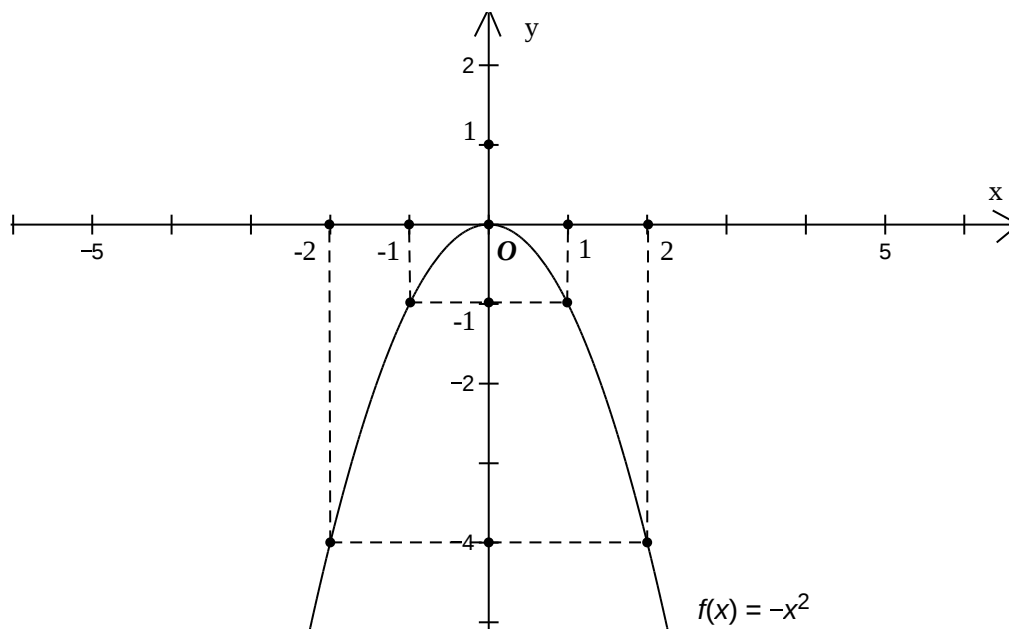
b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;1)$ và tiếp xúc với (P) .

Lời giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 (P)$, ta có bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	-4	-1	0	-1	-1

Vậy đồ thị hàm số $y = x^2 (P)$ là Pa-ra-bol đi qua $(-2;-4), (-1;-1), (0;0), (1;-1), (2;-4)$ và nhận Oy làm trục đối xứng.



b) Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;1)$ và tiếp xúc với (P) .

Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng $y = ax + b$.

(d) đi qua $A(0;1)$ nên ta có $1 = a.0 + b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow (d)$ có dạng $y = ax + 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$-x^2 = ax + 1 \Leftrightarrow x^2 + ax + 1 = 0 \quad (1).$$

Để (d) và (P) tiếp xúc nhau thì (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4.1.1 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2.$$

Vậy ta có hai đường thẳng (d) thỏa mãn là $y = 2x + 1$ và $y = -2x + 1$.

Bài 3. (1,0 điểm)

Cho hai số a, b phân biệt thỏa mãn $a^2 - 2021a = b^2 - 2021b = c$, với c là một số thực dương.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2021}{c} = 0$.

Lời giải

Theo bài ra ta có $a^2 - 2021a = b^2 - 2021b$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 - 2021a + 2021b = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a + b - 2021) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \text{ (ktm)} \\ a + b = 2021 \end{cases}$$

Với $a = b$ loại do a, b phân biệt.

Với $a + b = 2021 \Rightarrow b = 2021 - a \Rightarrow ab = 2021a - a^2 = -(a^2 - 2021a) = -c$.

Thay $a + b = 2021; ab = -c$ vào ta được $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2021}{c} = \frac{a+b}{ab} + \frac{2021}{c} = \frac{2021}{-c} + \frac{2021}{c} = 0$.

Vậy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2021}{c} = 0$.

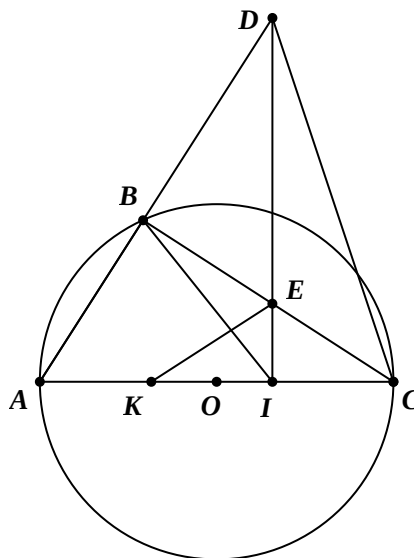
Bài 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AC . Gọi I là một điểm thuộc đoạn OC (I khác O và C). Qua I kẻ đường vuông góc với AC cắt BC tại E và AB kéo dài tại D . Gọi K là điểm đối xứng của C qua điểm I .

a) Chứng minh rằng các tứ giác $BDCI$ và $AKED$ nội tiếp.

b) Chứng minh $IC \cdot IA = IE \cdot ID$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng các tứ giác $BDCI$ và $AKED$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{DBC} = 90^\circ$ (kề bù với $\widehat{ABC} = 90^\circ$);
 $\widehat{DIC} = 90^\circ$ ($DI \perp AC$) $\Rightarrow$ tứ giác $BDCI$ nội tiếp đường tròn đường kính CD .

$\Rightarrow \widehat{ECI} = \widehat{EDB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BI}$).

Lại có K là điểm đối xứng của C qua điểm I nên I là trung điểm của $CK \Rightarrow \Delta EKC$ có EI vừa là trung tuyến, vừa là đường cao nên cân tại $E \Rightarrow \widehat{EKI} = \widehat{ECI} \Rightarrow \widehat{EKI} = \widehat{EDB} (= \widehat{ECI}) \Rightarrow$ tứ giác $AKED$ có góc ngoài đỉnh K bằng góc trong đỉnh D nên là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $IC.IA = IE.ID$.

Xét ΔIDA và ΔICE có:

$\widehat{IDA} = \widehat{ICE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{BI}$);

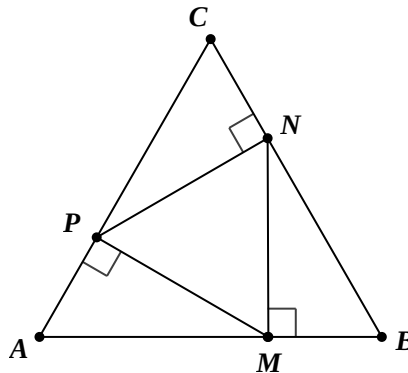
$\widehat{AID} = \widehat{EIC} (= 90^\circ, DI \perp AC)$

$\Rightarrow \Delta IDA \sim \Delta ICE (g.g) \Rightarrow \frac{ID}{IA} = \frac{IC}{IE} \Rightarrow IC.IA = IE.ID$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC đều có diện tích 36 cm^2 . Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CA sao cho $MN \perp BC$; $NP \perp AC$; $PM \perp AB$. Chứng tỏ rằng tam giác MNP đều và tính diện tích tam giác MNP .

Lời giải



Trong ΔMNB vuông tại M , ta có $\widehat{MBN} + \widehat{MNB} = 90^\circ$; mà $PN \perp BC (GT)$
 $\Rightarrow \widehat{MNB} + \widehat{MNP} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MNP} = \widehat{MBN} = 60^\circ (= 90^\circ - \widehat{MNB})$;

Trong ΔAMP vuông tại P , ta có $\widehat{AMP} + \widehat{PAM} = 90^\circ$; mà $NM \perp AB (GT)$
 $\Rightarrow \widehat{AMP} + \widehat{PMN} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{PMN} = \widehat{PAM} = 60^\circ (= 90^\circ - \widehat{AMP})$;

ΔMNP có $\widehat{MNP} = \widehat{PMN} = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

Đặt $MN = NP = PN = x$ vì $\triangle MNP$ đều nên $S_{MNP} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$.

Mặt khác $\triangle BMN = \triangle CNP = \triangle APM$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow S_{BMN} = S_{CNP} = S_{APM}$.

Trong tam giác BMN vuông tại M ta có $BM = MN \cdot \tan B = x \cdot \cot 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow S_{BMN} = \frac{1}{2} BM \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{3} \cdot x = \frac{x^2\sqrt{3}}{6}.$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = 3 \cdot S_{BMN} + S_{MNP} \Rightarrow 36 = 3 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{6} + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 3 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 36 \Rightarrow \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 12 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

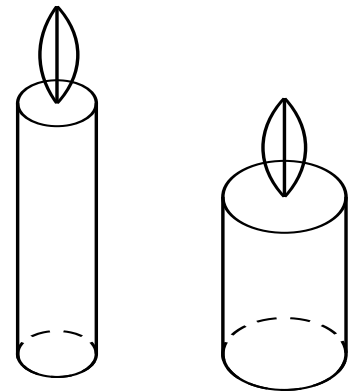
Vậy $S_{MNP} = 12 \text{ cm}^2$.

Bài 6. (1,0 điểm)

Hai ngọn nến hình trụ có chiều cao và đường kính khác nhau được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Ngọn nến thứ nhất cháy hết trong 6 giờ, ngọn nến thứ hai cháy hết trong 8 giờ. Hai ngọn nến được thắp sáng cùng lúc, sau 3 giờ chúng có cùng chiều cao.

a) Tìm tỉ lệ chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến.

b) Biết tổng chiều cao của hai ngọn nến là 63 cm. Tính chiều cao của mỗi ngọn nến.



Lời giải

a) Tìm tỉ lệ chiều cao lúc đầu của hai ngọn nến.

Gọi chiều cao ngọn nến thứ nhất là a cm, chiều cao ngọn nến thứ hai là b cm, ($a, b > 0$).

Giả sử tốc độ tiêu hao khi cháy của hai ngọn nến là không đổi.

Mỗi giờ cây nến thứ nhất giảm $\frac{1}{6}$ chiều cao, cây nến thứ hai giảm $\frac{1}{8}$ chiều cao.

Sau 3 giờ cây nến thứ nhất còn $1 - 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ chiều cao.

$\Rightarrow$ Chiều cao của cây nến thứ nhất còn lại là $\frac{1}{2}a$.

Sau 3 giờ cây nến thứ hai còn $1 - 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ chiều cao.

$\Rightarrow$ Chiều cao của cây nến thứ hai còn lại là $\frac{5}{8}b$.

Vì sau 3 giờ chiều cao của hai cây nến bằng nhau nên

$$\frac{1}{2}a = \frac{5}{8}b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{4}.$$

Vậy tỉ lệ chiều cao ban đầu của ngọn nến thứ nhất so với ngọn nến thứ hai là $\frac{5}{4}$.

b) Biết tổng chiều cao của hai ngọn nến là 63 cm. Tính chiều cao của mỗi ngọn nến.

Tổng chiều cao ngọn nến là 63 cm $\Rightarrow a + b = 63$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{4} = \frac{a+b}{5+4} = \frac{63}{9} = 7.$$

$$\text{Vì } \frac{a}{5} = 7 \Rightarrow a = 7.5 = 35(\text{cm}); \frac{b}{4} = 7 \Rightarrow b = 7.4 = 28(\text{cm}).$$

Vậy ban đầu ngọn nến thứ nhất cao 35 cm, ngọn nến thứ hai cao 28 cm.

===== **Hết** =====