

MÔN THI: TOÁN – CẤP THCS
THỜI GIAN LÀM BÀI: 150 PHÚT
(Không kể thời gian phát đề)

Bài 1: Cho $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$.

- a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.
b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3xy - 3x - 3y = 3 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}$$

Bài 3: Chứng minh rằng $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

Bài 4: Tìm số cạnh của một đa giác, biết số đường chéo hơn số cạnh là 7.

Bài 5: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Gọi đường vuông góc từ điểm M nằm trong tam giác đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt là MD, ME, MF . Xác định vị trí điểm M để $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Bài 6: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại 2 điểm A, B . Một đường thẳng (d) bất kỳ qua A cắt $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ lần lượt tại M, N . Tiếp tuyến tại M của $(O_1; R_1)$ và tiếp tuyến tại N của $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại I . Tìm giá trị lớn nhất của bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN khi (d) quay quanh A .

--- HẾT ---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Cho $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$.

a) Rút gọn A . Tìm x để A đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

Lời giải:

a) Với $x > 4$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}} = \frac{x(\sqrt{(\sqrt{x-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2})}{\sqrt{(x-4)^2}} \\ &= \frac{x(|\sqrt{x-4}+2| + |\sqrt{x-4}-2|)}{|x-4|} = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + |\sqrt{x-4}-2|)}{x-4} \end{aligned}$$

$$* \text{ Nếu } \sqrt{x-4}-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 8 \text{ thì } A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 + \sqrt{x-4}-2)}{x-4} = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}.$$

$$* \text{ Nếu } \sqrt{x-4}-2 < 0 \Leftrightarrow 4 < x < 8 \text{ thì } A = \frac{x(\sqrt{x-4}+2 - \sqrt{x-4}+2)}{x-4} = \frac{4x}{x-4}.$$

$$\text{Suy ra } A = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{x-4}} & \text{nếu } x \geq 8 \\ \frac{4x}{x-4} & \text{nếu } 4 < x < 8 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x \geq 8 \text{ thì } A = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} = \frac{2(x-4)+8}{\sqrt{x-4}} = 2\sqrt{x-4} + \frac{8}{\sqrt{x-4}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{x-4} \cdot \frac{8}{\sqrt{x-4}}} = 8.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=8$.

$$+ \text{ Với } 4 < x < 8 \text{ thì } A = \frac{4x}{x-4} = \frac{4(x-4)+16}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4} > 4 + \frac{16}{8-4} = 8.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 8, đạt được tại $x=8$.

$$\text{b) } + \text{ Nếu } 4 < x < 8 \text{ thì } P = \frac{4x}{x-4} = 4 + \frac{16}{x-4}.$$

Với x nguyên, để P nguyên thì $x-4$ là ước của 16, nhưng vì $4 < x < 8$ nên

$$0 < x-4 < 4 \Rightarrow x-4 \in \{1;2\}$$

$$\text{Suy ra: } x \in \{5;6\}.$$

$$+ \text{ Nếu } x \geq 8 \text{ thì } P = \frac{2x}{\sqrt{x-4}}.$$

Với x nguyên, để P nguyên thì $\sqrt{x-4} = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) suy ra $x = k^2 + 4$.

$$\text{Do đó } P = \frac{2(k^2+4)}{k} = 2k + \frac{8}{k}.$$

P nguyên thì k là ước của 8, mà $k \geq 2$ (vì $x \geq 8$) nên $k \in \{2;4;8\}$

Suy ra: $x \in \{8; 20; 68\}$.

Vậy với $x \in \{5; 6; 8; 20; 68\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3xy - 3x - 3y = 3 \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 \end{cases}$$

Lời giải:

Ta có
$$\begin{cases} 3xy - 3x - 3y = 3 & (1) \\ 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 7 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 3 + 4$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 9x = -y^3 + 6y + 3xy - 3x - 3y + 4$

$\Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = -y^3 + 3xy + 3y$

$\Leftrightarrow 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -y^3 + 3y(x+1)$

$\Leftrightarrow 4(x-1)^3 = -y^3 + 3y(x+1). \quad (*)$

Từ (1) $\Leftrightarrow xy - x - y = 1 \Leftrightarrow x+1 = xy - y \Leftrightarrow x+1 = y(x-1)$. Do đó

$(*) \Leftrightarrow 4(x-1)^3 = -y^3 + 3y^2(x-1). \quad (**)$

Nhận thấy $y=0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình nên chia 2 vế của phương trình (**) trên cho y^3 , ta được

$$(**) \Leftrightarrow 4\left(\frac{x-1}{y}\right)^3 = -1 + 3\frac{x-1}{y}. \quad (***)$$

Đặt $t = \frac{x-1}{y}$, phương trình (***) trở thành

$$4t^3 = -1 + 3t \Leftrightarrow 4t^3 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(4t^2 - 4t + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ 1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

* Với $t = -1 \Rightarrow \frac{x-1}{y} = -1 \Rightarrow x-1 = -y \Leftrightarrow y = 1-x$. Thế vào phương trình (1), ta được

$x(1-x) - x - (1-x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + x - 2 = 0$ (vô nghiệm).

* Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x-1}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x-2 = y$. Thế vào phương trình (1), ta được

$$x(2x-2) - x - (2x-2) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow y = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{17}}{4} \Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \left\{ \left(\frac{5+\sqrt{17}}{4}; \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right); \left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right) \right\}$.

Bài 3: Chứng minh rằng $A=1^3+2^3+3^3+\dots+100^3$ chia hết cho $B=1+2+3+\dots+100$.

Lời giải:

Ta có $B=1+2+3+\dots+100=\frac{(1+100).100}{2}=101.50$.

Như vậy để A chia hết cho B thì ta đi chứng minh A vừa chia hết cho 101, vừa chia hết cho 50. Thật vậy

* Xét $A=1^3+2^3+3^3+\dots+100^3$
 $= (1^3+100^3) + (2^3+99^3) + (3^3+98^3) + \dots + (50^3+51^3)$.

Nhận thấy $1^3+100^3=(1+100)(1^2-1.100+100^2)=101.9901:101$.

Tương tự, các tổng còn lại đều chia hết cho 101 nên $A:101$. (1)

* Xét $A=1^3+2^3+3^3+\dots+100^3$
 $= (1^3+99^3) + (2^3+98^3) + (3^3+97^3) + \dots + (49^3+51^3) + 50^3 + 100^3$.

Nhận thấy $1^3+99^3=(1+99)(1^2-1.99+99^2)=100.9703:50$.

Tương tự, các tổng còn lại đều chia hết cho 50 nên $A:50$. (2)

Từ (1) và (2), kết hợp với $ƯCLN(101;50)=1$ nên $A:(101.50)$ hay $A:B$.

Bài 4: Tìm số cạnh của một đa giác lồi, biết số đường chéo hơn số cạnh là 7.

Lời giải:

Giả sử đa giác lồi có n cạnh ($n>3$).

Suy ra số đường chéo của đa giác là $\frac{n(n-3)}{2}$.

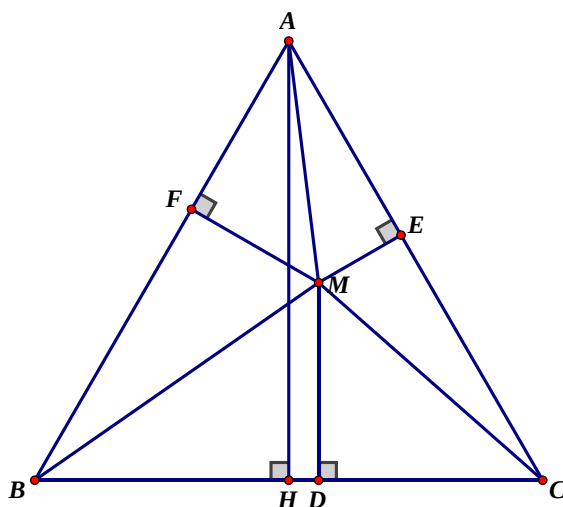
Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{n(n-3)}{2} - n = 7 \Leftrightarrow n(n-3) - 2n = 14 \Leftrightarrow n^2 - 5n - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=7 & (n) \\ n=-2 & (l) \end{cases}$$

Vậy đa giác lồi có 7 cạnh.

Bài 5: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Gọi đường vuông góc từ điểm M nằm trong tam giác đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt là MD, ME, MF . Xác định vị trí điểm M để $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

Lời giải:



Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác ABC, MBC, MCA, MAB .

Gọi h là độ dài chiều cao của tam giác ABC . Khi đó

$$\frac{S}{S_1} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBC}} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a.MD} = \frac{h}{MD}; \quad \frac{S}{S_2} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MCA}} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a.ME} = \frac{h}{ME} \quad \text{và} \quad \frac{S}{S_3} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MAB}} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a.MF} = \frac{h}{MF}.$$

Suy ra $\frac{S}{S_1} + \frac{S}{S_2} + \frac{S}{S_3} = \frac{h}{MD} + \frac{h}{ME} + \frac{h}{MF}$ hay $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} = \frac{1}{h}.S.\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right).$

Lại có $S = S_1 + S_2 + S_3$ và $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} = \frac{2\sqrt{3}}{3a}.(S_1 + S_2 + S_3).\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right).$

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$, ta được

$$(S_1 + S_2 + S_3).\left(\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right) \geq 9.$$

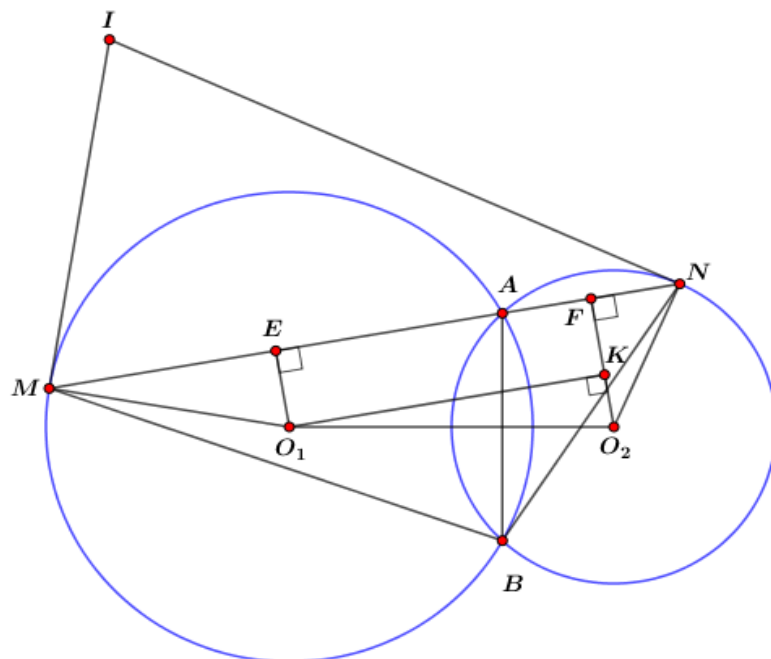
Do đó $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3a}.9 = \frac{6\sqrt{3}}{a}.$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{MD} = \frac{1}{ME} = \frac{1}{MF} \Leftrightarrow MD = ME = MF$ hay M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Vậy tổng $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Bài 6: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại 2 điểm A, B . Một đường thẳng (d) bất kỳ qua A cắt $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ lần lượt tại M, N . Tiếp tuyến tại M của $(O_1; R_1)$ và tiếp tuyến tại N của $(O_2; R_2)$ cắt nhau tại I . Tìm giá trị lớn nhất của bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN khi (d) quay quanh A .

Lời giải:



Ta có: $IMN = MBA$ (tính chất góc giữa tiếp tuyến và dây cung).

$INM = NAB$ (tính chất góc giữa tiếp tuyến và dây cung).

Xét tứ giác $IMNB$, ta có:

$$MBN = MBA + NBA = IMN + INM = 180^\circ - MIN \Rightarrow MBN + MIN = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác $IMNB$ nội tiếp.

Các góc AMB và ANB là những góc nội tiếp chắn cung AB cố định của $(O; R_1)$ và $(O; R_2)$ nên $AMB; ANB$ không đổi.

Suy ra MBN không đổi nên $MIN = 180^\circ - MBN$ không đổi.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MIN thì $MN = 2R \cdot \sin MIN \Rightarrow R = \frac{MN}{2 \cdot \sin MIN}$.

Do đó R lớn nhất khi và chỉ khi MN lớn nhất.

Gọi E, F là hình chiếu vuông góc của O_1O_2 lên (d) , K là hình chiếu vuông góc của O_1 lên O_2F

Khi đó: $MN = 2EF = 2O_1K \leq 2O_1O_2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $EF \parallel O_1O_2$ hay $(d) \parallel O_1O_2$.

HẾT