

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1:

- a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + x^2 - x = \sqrt{x^2 + 1}$.
- b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2xy - 1)^2 + 4x^2 = 5y^2 \\ 2x(x - y^2) = y^2 - y \end{cases}.$$

Bài 2:

- a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $(x - y)^2(8 - xy) + 4 = 12(x - y)$.
- b) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $2^n + 36$ và $12^{2n} + 25$ không đồng thời là số chính phương.

Bài 3:

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $1 \leq x, y, z \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = 7x + y + z + 9y^2 + 2z^3 - 3xz - 26xyz.$$

Bài 4:

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Tia AH cắt (O) tại K (K khác A), tia KO cắt (O) tại M (M khác K) và tia MH cắt (O) tại P (P khác M).

- a) Chứng minh $OD \parallel MH$ và 4 điểm A, O, D, P cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Gọi Q là giao điểm của PA và EF . Chứng minh $DQ \perp EF$.
- c) Tia PE và tia PF cắt đường tròn (O) lần lượt tại L và N (L, N khác P). Chứng minh $LC = NB$.

Bài 5:

Cho tập hợp A gồm 2022 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2022. Tìm một số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm n phần tử của A đều chứa 3 phần tử là các số đôi một nguyên tố cùng nhau.

----- **HẾT** -----

Bài 1:

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + x^2 - x = \sqrt{x^2+1}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2xy-1)^2 + 4x^2 = 5y^2 \\ 2x(x-y^2) = y^2 - y \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện $x \geq -1$.

Ta có $\sqrt{x+1} + x^2 - x = \sqrt{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + x^2 + 1 - (x+1) = \sqrt{x^2+1}.$$

Đặt $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{x^2+1}$. Điều kiện $a \geq 0, b > 0$.

Khi đó phương trình trở thành: $a + b^2 - a^2 = b$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 1. \end{cases}$$

Trường hợp 1. Nếu $a = b \Rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2+1}$

$$\Leftrightarrow x+1 = x^2+1$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 0 \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

Trường hợp 2. Nếu $a + b = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1} = 1$.

Vì $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{1} = 1; \sqrt{x+1} > 0$, với mọi $x \geq -1$.

Suy ra VT > 1 , nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; 0\}$.

b)
$$\begin{cases} (2xy-1)^2 + 4x^2 = 5y^2 & (1) \\ 2x(x-y^2) = y^2 - y & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow (2xy-1)y = 2x^2 - y^2$.

• Nếu $y = 0 \Rightarrow 4x^2 + 1 = 0$ (vô lý), vì $4x^2 + 1 > 1 > 0$.

• Nếu $y \neq 0$. Khi đó
Thế $2xy - 1 = \frac{2x^2 - y^2}{y}$ vào (1), ta được

$$\left(\frac{2x^2 - y^2}{y}\right)^2 + 4x^2 = 5y^2 \quad (3).$$

Đặt $\frac{x}{y} = t$ và chia hai vế của (3) cho y^2 , ta được:

$$(2t^2 - 1)^2 + 4t^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4t^4 - 4t^2 + 1 + 4t^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4t^4 = 4 \Leftrightarrow t^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(t + 1)(t^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

- Nếu $t = 1 \Rightarrow x = y$ thế vào (2), ta được

$$\Leftrightarrow x^2 = (2x^2 - 1)x$$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1)(2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 & (\text{loại vì } y \neq 0) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = \frac{-1}{2} \end{cases}.$$

- Nếu $t = -1 \Rightarrow y = -x$, thế vào (2) ta được

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 1)x = x^2$$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (\text{loại vì } y \neq 0). \left(\text{vì } 2x^2 - x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \right).$$

Vậy hệ có nghiệm $(1; 1), \left(\frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$.

Bài 2:

a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $(x - y)^2(8 - xy) + 4 = 12(x - y)$.

b) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $2^n + 36$ và $12^{2n} + 25$ không đồng thời là số chính phương.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $x - y = a, xy = b$ thì $a, b \in \mathbb{Z}$, ta biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned}(x - y)^2(8 - xy) + 4 &= 12(x - y) \Leftrightarrow a^2(8 - b) + 4 = 12a \\ \Leftrightarrow b &= \frac{8a^2 - 12a + 4}{a^2} = 8 - \frac{12a - 4}{a^2} \in \mathbb{Z} \quad (1) \\ \Leftrightarrow \frac{12a - 4}{a^2} &\in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Suy ra $a^2 \mid 12a - 4 = 4(3a - 1)$ mà $(3a - 1, a^2) = (3a - 1, a) = 1$ nên $a^2 \mid 4$.

Từ đây ta được $a \in \{1, -1, 2, -2\}$. Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $a = 1$ thế vào (1) ta được $b = 0$ hay $x - y = 1$ và $xy = 0$.
Từ đây ta được các cặp (x, y) thỏa mãn là $(0, -1), (1, 0)$.
- Nếu $a = -1$ thế vào (1) ta được $b = 24$. Bằng phép thế ta được phương trình $y(y - 1) = 24$. Không có (x, y) thỏa mãn vì phương trình này vô nghiệm nguyên.
- Nếu $a = 2$ thế vào (1) ta được $b = 3$. Bằng phép thế ta được phương trình

$$\begin{aligned}y(y + 2) &= 3 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow (y - 1)(y + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = -3 \Rightarrow x = -1. \end{cases}\end{aligned}$$

- Nếu $a = -2$ thế vào (1) ta được $b = 15$. Bằng phép thế ta được phương trình

$$y(y - 2) = 15 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 4^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \Rightarrow x = 3 \\ y = -3 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$

Vậy tất cả các cặp (x, y) thỏa mãn là $(0; -1), (1; 0), (3; 1), (-1; 3), (3; 5), (-5; -3)$.

b) Giả sử tồn tại n nguyên dương sao cho $2^n + 36$ và $12^{2n} + 25$ là số chính phương.

Ta lập bảng đồng dư như sau

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

Do đó ta rút ra được nhận xét: Một số chính phương bất kì chỉ có thể đồng dư 0, 1, 2 hoặc 4 theo modulo 7..

Quay trở lại bài toán, vì $2^n + 36 \equiv 2^n \pmod{3}$ nên n phải là số chẵn (vì số chính phương bất kì chỉ có đồng dư 0, 1 theo modulo 3). Từ đó ta xét các trường hợp sau.

- Nếu $n = 3k$ với k chẵn thì $12^n + 25 \equiv 5^n + 4 = 125^k + 4 \equiv (-1)^k + 4 = 5 \pmod{7}$ mâu thuẫn với nhận xét.

- Nếu $n = 3k + 1$ với k lẻ thì $2^n + 36 = 2 \cdot 8^k + 36 \equiv 2 + 1 = 3 \pmod{7}$ mâu thuẫn với nhận xét.
- Nếu $n = 3k + 2$ với k chẵn thì $2^n + 36 = 4 \cdot 8^k + 36 \equiv 4 + 1 = 5 \pmod{7}$ mâu thuẫn với nhận xét.

Do đó điều giả sử là sai. Vậy $2^n + 36$ và $12^{2n} + 25$ không đồng thời là số chính phương với mọi n nguyên dương.

Bài 3:

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $1 \leq x, y, z \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = 7x + y + z + 9y^2 + 2z^3 - 3xz - 26xyz.$$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết ta có $1 \leq z \leq 3 \Rightarrow (z - 1)^2(z - 3) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (z^2 - 2z + 1)(z - 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 - 5z^2 + 7z - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow z^3 \leq 5z^2 - 7z + 3. \quad (1)$$

Cũng theo giả thiết ta có $(z - 1)(z - 3) \leq 0 \Leftrightarrow z^2 \leq 4z - 3$.

Thế vào (1) ta được $2z^3 \leq 10(4z - 3) - 14z + 6 = 26z - 24$.

Từ đây kết hợp với $27 - 3x - 26xy \leq 27 - 3 - 26 = -2 < 0$ ta có

$$\begin{aligned} 2z^3 - 3zx - 26xyz + z &\leq 26z - 24 - 3zx - 26xyz + z = z(27 - 3x - 26xy) - 24 \\ &\leq 27 - 3x - 26xy - 24 = 3 - 3x - 26xy. \end{aligned}$$

Từ đây kết hợp với $4 - 26y < 4 - 26 = -22 < 0$ ta có

$$\begin{aligned} T &\leq 7x + y + 9y^2 + 3 - 3x - 26xy = 4x + y + 9y^2 + 3 - 26xy \\ &= x(4 - 26y) + y + 9y^2 + 3 \\ &\leq 4 - 26y + y + 9y^2 + 3 = 9y^2 - 25y + 7. \end{aligned}$$

Đến đây áp dụng $y^2 \leq 4y - 3$ (vì x, y, z bình đẳng) nên ta được

$$T \leq 9(4y - 3) - 25y + 7 = 11y - 20 \leq 11 \cdot 3 - 20 = 13.$$

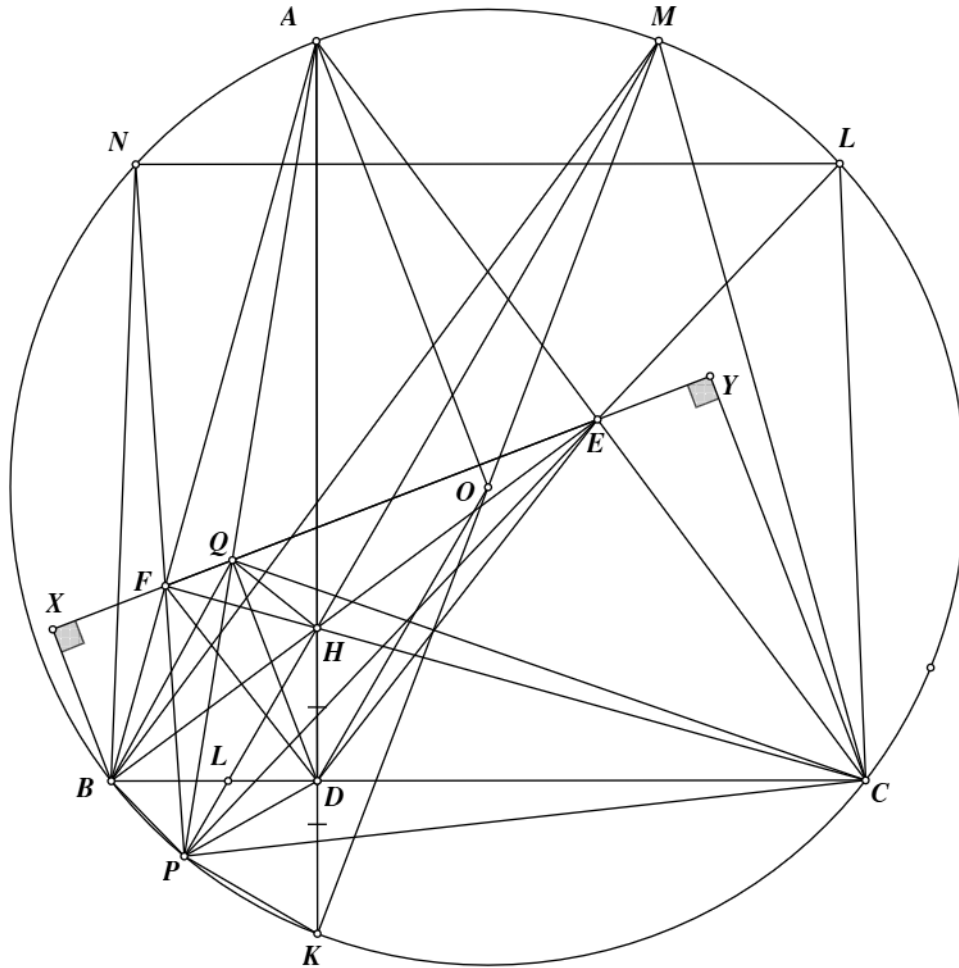
Vậy giá trị lớn nhất của $T = 13$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1, y = 3, z = 1$.

Bài 4:

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm (O) . Các đường cao AD , BE , CF cắt nhau tại H . Tia AH cắt (O) tại K (K khác A), tia KO cắt (O) tại M (M khác K) và tia MH cắt (O) tại P (P khác M).

- Chứng minh $OD \parallel MH$ và 4 điểm A, O, D, P cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi Q là giao điểm của PA và EF . Chứng minh $DQ \perp EF$.
- Tia PE và tia PF cắt đường tròn (O) lần lượt tại L và N (L, N khác P). Chứng minh $LC = NB$.

Hướng dẫn giải



- Ta có $\widehat{KBC} = \widehat{DAC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung KC).
Do $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$, mà hai đỉnh D và E là hai đỉnh kề nhau.
Suy ra tứ giác $ABDE$ nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{EBD} = \widehat{EAD} \Rightarrow \widehat{HBD} = \widehat{DAC}$.
Do đó $\widehat{HBD} = \widehat{KBC} (= \widehat{DAC})$.
Suy ra $\triangle BHD = \triangle BKD$ (c-g-c) $\Rightarrow DH = DK$, hay D là trung điểm của HK .

Xét $\triangle KHM$ có O là trung điểm của KM , D là trung điểm của HK .

Suy ra OD là đường trung bình của $\triangle HMK \Rightarrow OD \parallel HM$.

- Vì $OD \parallel MH \Rightarrow \widehat{DOK} = \widehat{PMK}$ (hai góc đồng vị).

Mà $\widehat{PMK} = \frac{1}{2}\widehat{POK}$ (góc nội tiếp bằng một nửa góc ở tâm cùng chắn cung PK).

$\Rightarrow \widehat{DOK} = \frac{1}{2}\widehat{POK}$ hay OD là phân giác của $\widehat{POK}$.

$\Rightarrow \widehat{POD} = \widehat{DOK}$. Mà $\widehat{PMK} = \widehat{PAD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung PK).

$\Rightarrow \widehat{POD} = \widehat{PAD}$, mà hai đỉnh A và O là hai đỉnh kề nhau.

Suy ra tứ giác $APDO$ nội tiếp, hay bốn điểm A, O, P, D cùng nằm trên một đường tròn.

- b) Dễ dàng chứng minh được tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{AEQ} = \widehat{ABC}$. Mà $\widehat{ABC} = \widehat{APC}$ nên $\widehat{AEQ} = \widehat{APC}$. Do đó ta được

$$\triangle AEQ \sim \triangle APC \Rightarrow \frac{AE}{AP} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow AP \cdot AQ = AE \cdot AC. \quad (1)$$

Vì $HECD$ là tứ giác nội tiếp nên $AH \cdot AD = AE \cdot AC$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $AH \cdot AD = AP \cdot AQ$. Do đó tứ giác $PQHD$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\triangle AOP \sim \triangle PHD$ vì hai tam giác cân và $\widehat{AOP} = \widehat{ADP} = \widehat{PDH}$. Từ đây kết hợp với $PQHD$ là tứ giác nội tiếp suy ra $\widehat{PQD} = \widehat{PHD} = \widehat{PAO}$ nên $QD \parallel AO$.

Vì $\widehat{OAC} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{AEF}$ nên $OA \perp EF$. Mà $QD \parallel AO$ nên $QD \perp EF$.

Vậy bài toán được chứng minh.

- c) Vì $AP \cdot AQ = AE \cdot AC$ theo b) và $AE \cdot AC = AF \cdot AB$ vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp nên tứ giác $PQEC$, $PQFB$ nội tiếp. Do đó ta được

$$\widehat{FQB} = \widehat{FPB} = \widehat{NPB}, \widehat{EQC} = \widehat{EPC} = \widehat{LPC} \quad (*)$$

Kẻ BX, CY vuông góc với EF . Ta có $\triangle CEY \sim \triangle ABD$ (g-g); $\triangle BFX \sim \triangle ACD$ (g-g).

Từ đây kết hợp với $CD \cdot BC = CE \cdot AC$, $BD \cdot BC = BF \cdot AB$ và định lý Thales trong hình thang $BXYC$ ta được các tỷ lệ thức sau

$$\frac{CY}{AD} = \frac{CE}{AB}, \frac{BX}{AD} = \frac{BF}{AC} \Leftrightarrow \frac{CY}{BX} = \frac{CE}{BF} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{CD \cdot BC}{BD \cdot BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{YQ}{XQ}.$$

Mà $\widehat{CYQ} = \widehat{BXQ} = 90^\circ$ nên $\triangle CYQ \sim \triangle BXQ$ (g-g) suy ra

$$\widehat{EQC} = \widehat{YQC} = \widehat{XQB} = \widehat{FQB} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta được $\widehat{NPB} = \widehat{LPC}$ hay sd NB = sd LC suy ra $NB = LC$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 5:

Cho tập hợp A gồm 2022 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2022. Tìm một số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp con gồm n phần tử của A đều chứa 3 phần tử là các số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Hướng dẫn giải

Trước hết, ta có nhận xét sau: Trong 6 số tự nhiên liên tiếp, nếu ít nhất 5 số được chọn thì ta luôn tìm được 3 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Chứng minh: Gọi 6 số tự nhiên liên tiếp đó là: $a; a + 1; \dots; a + 5$.

- Giả sử a chẵn, ta đặt: $a = 2k$, khi đó 6 số tự nhiên liên tiếp sẽ là: $2k; \dots; 2k + 5$. Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu cả 3 số $2k + 1; 2k + 3; 2k + 5$ đều được chọn, ta có 3 số này thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Trường hợp 2: Nếu cả 3 số này có ít nhất 1 số không được chọn, khi đó vì có ít nhất 5 số được chọn nên cả 3 số $2k; 2k + 2; 2k + 4$ đều sẽ được chọn.

Và nếu cả 2 số $2k + 1; 2k + 3$ hoặc cả 2 số $2k + 3; 2k + 5$ đều được chọn thì ta lần lượt chọn các số $2k + 2; 2k + 4$.

Khi đó 5 số được chọn đó là: $2k; 2k + 1; 2k + 2; 2k + 4; 2k + 5$.

Đến đây, trong 2 số $2k + 1; 2k + 5$ sẽ có ít nhất 1 số không chia hết cho 3 vì hiệu hai số này là 4 không chia hết cho 3.

Ta xét $2k + 1$ chia hết cho 3. Trường hợp còn lại chứng minh tương tự. Trong trường hợp này, ta chọn 3 số: $2k + 1; 2k + 5; 2k + 2$. Còn với $2k + 5$ chia hết cho 3 thì ta lại chọn: $2k + 5; 2k + 4; 2k + 1$.

- Trường hợp a lẻ, ta chứng minh tương tự.

Như vậy nhận xét được chứng minh.

Quay trở lại bài toán, xét $n = 1349$. Khi đó chia 2022 số tự nhiên thành 337 nhóm: $\{1; 2; 3; \dots; 6\}, \dots, \{2017; 2018; \dots; 2022\}$.

Khi đó, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại ít nhất một nhóm chứa ít nhất 5 phần tử được chọn và theo nhận xét trên thì tồn tại 3 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

Ta chứng minh $n \leq 1348$ không thỏa mãn. Thật vậy, ta chọn tất cả các số nhận 2 hoặc 3 làm ước.

Ta tính được có 1011 số chia hết cho 2, 674 số chia hết cho 3, 337 số chia hết cho 6. Vì vậy số số được chọn sẽ là: $1011 + 674 - 337 = 1348$.

Vậy ta kết luận: $n = 1349$.