

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,0 điểm)

1. Cho $P = \sqrt{a^2 + a^2(a+1)^2 + (a+1)^2}$ với $a \in \mathbb{Q}$. Chứng minh P là một số tự nhiên
2. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$ với $x = 4 + 2\sqrt{3}$

Bài 2. (2,0 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $4x_1 = x_2^2$
2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

Bài 3. (1,5 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $n^2 + 2022$ là số chính phương
2. Giải bất phương trình $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} < 1$

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (T) tâm O và dây cung AB cố định ($O \notin AB$). P là điểm di động trên đoạn thẳng AB ($P \neq A, B$ và P khác trung điểm của đoạn thẳng AB). Đường tròn (T_1) tâm C đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (T) tại A. Đường tròn (T_2) tâm D đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (T) tại B. Hai đường tròn (T_1) và (T_2) cắt nhau tại N ($N \neq P$). Gọi (d_1) là tiếp tuyến chung của (T) với (T_1) tại A, (d_2) là tiếp tuyến chung của (T) với (T_2) tại B, (d_1) cắt (d_2) tại Q

- 1) Chứng minh tứ giác $AOBQ$ nội tiếp
- 2) Chứng minh $\angle ANP = \angle BNP$ và 4 điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn
- 3) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng ON luôn đi qua một điểm cố định khi P di động trên đoạn thẳng AB ($P \neq A, B$ và P khác trung điểm của đoạn thẳng AB)

Bài 5. (1,5 điểm)

- 1) Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = 2021$

Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2021}{2}}$$

- 2) Với số thực a , ta định nghĩa phần nguyên của số a là số lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là $[a]$. Dãy các số $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ được xác định bởi công thức

$$x_n = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}} \right] - \left[\frac{n}{\sqrt{2}} \right]. \text{ Hỏi trong 200 số } \{x_0; x_1; x_2; \dots; x_{199}\} \text{ có bao nhiêu số khác 0}$$

Biết $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có: } P &= \sqrt{a^2 + a^2(a+1)^2 + (a+1)^2} \\ &= \sqrt{a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a^2 + a + 1)^2} = |a^2 + a + 1| = a^2 + a + 1 \\ &(\text{Do } a^2 + a + 1 > 0) \end{aligned}$$

$$2) \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}. \text{ Ta có:}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-x} : \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) = \frac{\sqrt{x}-1}{x(\sqrt{x}-1)} \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Với } x = 4 + 2\sqrt{3}(\text{tmdk}) \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Bài 2.

$$1) \text{ Ta có } \Delta' = (m-1)^2. \text{ Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì } \Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$$

Vì $x_1 < x_2$ nên phương trình có hai nghiệm $x_1 = m - |m-1|; x_2 = m + |m-1|$

$$\text{Theo bài ra ta có: } 4x_1 = x_2^2 \Leftrightarrow 4(m - |m-1|) = (m + |m-1|)^2$$

$$\Leftrightarrow 4m - 4|m-1| = m^2 + 2m|m-1| + m^2 - 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 6m + 1 + 2m|m-1| + 4|m-1| = 0(1)$$

$$+) m > 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2m^2 - 6m + 1 + 2m(m-1) + 4(m-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2}(\text{tm}) \\ m = -\frac{1}{2}(\text{ktm}) \end{cases}$$

$$m < 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2m^2 - 6m + 1 - 2m(m-1) - 4(m-1) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Nếu} \\ \Leftrightarrow -8m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{8}(\text{tm}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } m \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{5}{8} \right\} \text{ thì thỏa đề}$$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$. Ta có:

$$x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0 \Leftrightarrow x^2 - yx + 2xy + x - 2y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)x + (x - y)(2y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow 2x^2 = 10 \Rightarrow \begin{cases} x = y = \sqrt{5} \\ x = y = -\sqrt{5} \end{cases} \\ x = -2x - 1 \Rightarrow 5y^2 + 4y + 1 = 10 \Leftrightarrow 5(y - 1)\left(y + \frac{9}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = -3 \\ y = -\frac{9}{5} \Rightarrow x = \frac{13}{5} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $(x; y) \in \left\{ (\sqrt{5}; \sqrt{5}); (-\sqrt{5}; -\sqrt{5}); (-3; 1); \left(\frac{13}{5}; -\frac{9}{5}\right) \right\}$

Bài 3.

1) Đặt $n^2 + 2022 = a^2$ ($a \in \mathbb{N}^+$)

Ta có: $n^2 + 2022 = a^2 \Leftrightarrow (a - n)(a + n) = 2022$

Vì $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow a - n \in \mathbb{N}; a + n \in \mathbb{N}$

Lại có: $(a - n) + (a + n) = 2a; 2$ do đó $a - n, a + n$ có cùng tính chẵn lẻ, mà 2022 là số chẵn nên $a - n, a + n$ đều là số chẵn $\Rightarrow (a - n)(a + n); 4$ mà 2022 không chia hết cho 4 nên không có giá trị nguyên n nào để $n^2 + 2022$ là số chính phương

2) ĐKXĐ: $-1 \leq x \leq 4$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4+x} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < \sqrt{4-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow x+1 < 4-x+1+2\sqrt{4-x} \Leftrightarrow x-2 < \sqrt{4-x} (*)$$

Với $-1 \leq x \leq 2, VT \leq 0; VP > 0$ nên $-1 \leq x \leq 2$ là nghiệm của bất phương trình đã cho

Với $x > 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 < 4 - x \Leftrightarrow x^2 - 3x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$

Vậy nghiệm bất phương trình đã cho là $-1 \leq x < 3$

[illegible]

2) Ta có: $AC = CP \Rightarrow \Delta ACP$ cân $\Rightarrow \angle ACP = \frac{180^\circ - \angle CAP}{2}$

Mà $\widehat{CAP} = \widehat{DPB}$ (ΔABO cân tại O) $\Rightarrow \angle ACP = \angle PDB$ (1)

Xét đường tròn (T_2) ta có : $\angle BNP = \frac{1}{2} \angle BDP$ (cùng chắn BP) (3)

*Chứng minh $ODCN$ nội tiếp

Ta có: $CPA = OBP \Rightarrow CP // OD(1)$

Ta có: $\widehat{PAC} = \widehat{BDP} \Rightarrow DP // OC(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $ODCP$ là hình bình hành $\Rightarrow \angle COD = \angle CPD$

Mà $\angle CND = \angle CPD$ (vì CD là trung trực của NP) $\Rightarrow \angle COD = \angle CND$

Mà O, N là hai đỉnh kề nhau của tứ giác $ODCN$ nên $ODCN$ là tứ giác nội tiếp

3) Có $OCPD$ là hình bình hành nên $OC = DP = ND = r_2$

Tứ giác $CDON$ nội tiếp có $OC = ND \Rightarrow CDON$ là hình thang cân.

Có $NP \perp CD, ON // CD \Rightarrow ON \perp NP$

Có $\widehat{NOA} = \widehat{NDC}$ ($CDON$ nt) mà $\angle NDC = \frac{1}{2} \angle NDP = \angle NBA$ (vì $CD \perp NP$)

$\Rightarrow \angle NOA = \angle NBA \Rightarrow AONB$ nội tiếp, mà $AOBQ$ nội tiếp đường tròn OQ

Suy ra N thuộc đường tròn đường kính OQ

Vậy đường trung trực của OD đi qua trung điểm T cố định của OQ

Bài 5.

1) Đặt $P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b}$ và $Q = \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{a+c} + \frac{a^2}{a+b}$

*) Chứng minh $P \geq Q$

Đặt $x = b+c, y = c+a, z = a+b$

$$\begin{aligned} P - Q &= \frac{a^2 - b^2}{b+c} + \frac{b^2 - c^2}{a+c} + \frac{c^2 - a^2}{a+b} \\ &= \frac{(y-x)z}{x} + \frac{(z-y)x}{y} + \frac{(x-z)y}{z} = \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} - (x+y+z) \end{aligned}$$

Ta có: $\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{x} \cdot \frac{xz}{y}} = 2z$. Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} \geq 2x; \frac{yz}{x} + \frac{xy}{z} \geq 2y \Rightarrow \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} \geq x+y+z \Rightarrow P - Q \geq 0 \text{ hay } P \geq Q$$

*)Ta có:

$$P + Q = \frac{a^2 + b^2}{b+c} + \frac{b^2 + c^2}{a+c} + \frac{c^2 + a^2}{a+b} \geq \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2})^2}{2(a+b+c)} \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}, \sqrt{b^2 + c^2} \geq \frac{b+c}{\sqrt{2}}, \sqrt{c^2 + a^2} \geq \frac{c+a}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(a+b+c) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } P+Q \geq \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2021}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Mà } P \geq Q \Rightarrow P \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2021}{2}} \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c = \frac{\sqrt{2021}}{3\sqrt{2}}$$

$$2) \text{ Ta có: } x_k \neq 0 \Leftrightarrow \frac{k}{\sqrt{2}} < p < \frac{k+1}{\sqrt{2}} \quad (0 \leq k \leq 199; k, p \in \mathbb{N}) \quad (1)$$

$$\Rightarrow 0 < p < \frac{k+1}{\sqrt{2}} \leq \frac{200}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2} < 142 \Rightarrow 0 < p < 100\sqrt{2}$$

$$\text{Có: } \begin{cases} p \in \mathbb{N} \\ 141 < 100\sqrt{2} < 142 \end{cases} \Rightarrow p \in \{1; 2; \dots; 141\} \quad (2)$$

(1) $\Rightarrow k < p\sqrt{2} < k+1$. Ta lại có $p \in \mathbb{N} \Rightarrow p\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$. Nên với mỗi giá trị p thỏa mãn (2) ta

đều có một số k ($0 \leq k \leq 199, k \in \mathbb{N}$) thỏa mãn $\frac{k}{\sqrt{2}} < p < \frac{k+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_k \neq 0$

Vậy có tất cả 141 số khác 0 nên có 59 số bằng 0