

Bài 1: (5 điểm)

Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$, chứng minh rằng

$$9 \leq (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 10.$$

Bài 2: (5 điểm)

Với mỗi số nguyên dương n , xét đa thức: $P_n(x) = x^n + (x - 1)^n - (x + 1)^n$.

- Chứng minh rằng với mỗi n nguyên dương, đa thức $P_n(x)$ có duy nhất một nghiệm dương, ký hiệu là r_n , và $r_n < r_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n}$.

Bài 3: (5 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) có $AB > BC$. Các điểm M, N lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC sao cho $AM = CN$. Gọi K là giao điểm của các đường thẳng MN và AC , P và Q lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AMK và tâm đường tròn bàng tiếp góc K của tam giác CNK . Gọi S là điểm chính giữa cung ABC của (C) . Chứng minh rằng $SP = SQ$.

Bài 4: (5 điểm)

- Cho các số nguyên dương a, k với $a \geq 2$. Chứng minh rằng $k \mid \varphi(a^k - 1)$, trong đó φ là phi hàm Euler.
- Cho số nguyên $m \geq 2$ và p là một số nguyên tố không là ước của m nhưng p là ước của $\varphi(m)$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên tố q sao cho $q \equiv 1 \pmod{p}$.
- Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên tố dạng $pk + 1$.

————— **HẾT** —————

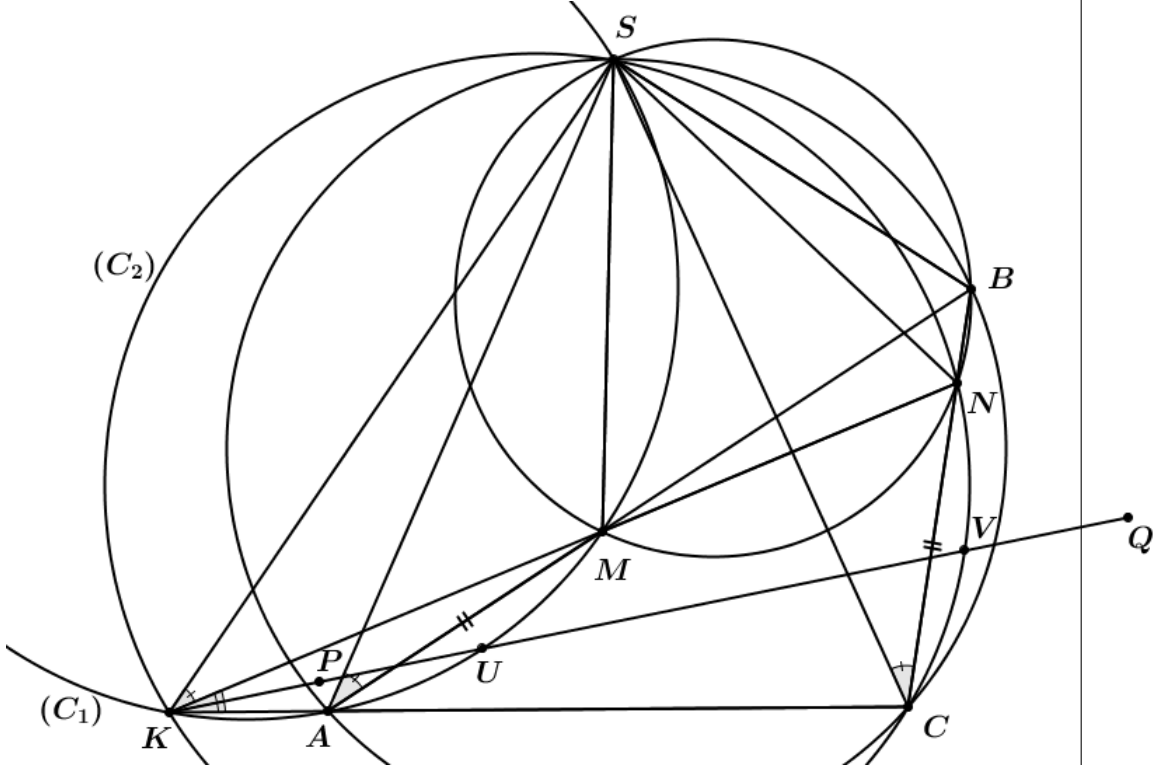
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ ký của cán bộ coi thi 1:..... Chữ ký của cán bộ coi thi 2:.....

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm
1(5,0đ)	Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad \text{và} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}},$ suy ra $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \in [1; 2]$.	1.5
	$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 10 \Leftrightarrow (b + c) \left(\frac{a}{bc} + \frac{1}{a} \right) + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \leq 7(*)$. Ta chứng minh: $\frac{a}{bc} + \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow (a - c)(a - b) \leq 0$. Muốn vậy không mất tính tổng quát ta giả sử a là số nằm giữa hai số b và c.	1
	Mặt khác, $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{b}{c} \leq 2$ luôn đúng.	1
	$\begin{aligned} \Rightarrow VT(*) &\leq (b + c) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \\ &= 2 + 2 \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \leq 2 + 2 \cdot \frac{5}{2} = 7. \end{aligned}$	1
	Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 2, c = 1$ hoặc $a = c = 1, b = 2$ và các hoán vị.	0.5
2(5,0đ)	a. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp. Thử trực tiếp, thấy đúng với $n = 1; 2$.	1
	Giả sử mệnh đề đúng $\forall n \leq k, k \in \mathbb{N}^*$. Xét $P_{k+1}(x) = x^{k+1} + (x - 1)^{k+1} - (x + 1)^{k+1}$ xác định và liên tục trên $[0; +\infty)$. Dễ thấy $P'_{k+1}(x) = (k + 1) \cdot P_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = r_k > 0$, và $\begin{cases} P_{k+1}(0) = 0 \\ P_{k+1}(0) = -2 \end{cases}, \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{k+1}(x) = +\infty$	1

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm														
	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>r_k</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P'_{k+1}(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$P_{k+1}(x)$</td><td>$P_{k+1}(0)$</td><td></td><td>$P_{k+1}(r_k)$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> Dựa vào BBT, trên $(0; +\infty)$ tồn tại duy nhất $r_{k+1} > r_k : P_{k+1}(r_{k+1}) = 0$. $\Rightarrow P_{k+1}(x)$ có duy nhất một nghiệm dương r_{k+1} và $r_{k+1} > r_k \Rightarrow$ đpcm.	x	0	r_k	$+\infty$	$P'_{k+1}(x)$		-	0	+	$P_{k+1}(x)$	$P_{k+1}(0)$		$P_{k+1}(r_k)$	$+\infty$	1
x	0	r_k	$+\infty$													
$P'_{k+1}(x)$		-	0	+												
$P_{k+1}(x)$	$P_{k+1}(0)$		$P_{k+1}(r_k)$	$+\infty$												
	b. Xét hàm số $f(x) = 1 + e^{-x} - e^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = x_0 > 0$. Với mọi $s > 0$ ta có $\begin{aligned} \lim \frac{P_n\left(\frac{n}{s}\right)}{\left(\frac{n}{s}\right)^n} &= \lim \frac{\left(\frac{n}{s}\right)^n + \left(\frac{n}{s} - 1\right)^n - \left(\frac{n}{s} + 1\right)^n}{\left(\frac{n}{s}\right)^n} \\ &= \lim \left(1 + \left(1 - \frac{s}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n\right) \\ &= 1 + e^{-s} - e^s = f(s) \end{aligned}$	1														
	Với mọi $0 < \epsilon < \frac{1}{x_0}$ nhỏ tùy ý Chọn $s = \frac{x_0}{1 - \epsilon x_0} > x_0$ thì $f(s) < f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim \frac{P_n\left(\frac{n}{s}\right)}{\left(\frac{n}{s}\right)^n} < 0$ nên tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\forall n > n_1$ ta có $P_n\left(\frac{n}{s}\right) < 0 \Rightarrow \frac{n}{s} < r_n, \forall n > n_1$ $\Rightarrow \frac{r_n}{n} > \frac{1}{s} = \frac{1}{x_0} - \epsilon, \forall n > n_1$.	0.5														
	Chọn $s = \frac{x_0}{1 + \epsilon x_0} < x_0 \Rightarrow f(s) > f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim \frac{P_n\left(\frac{n}{s}\right)}{\left(\frac{n}{s}\right)^n} > 0$ nên tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $\forall n > n_2$ ta có $P_n\left(\frac{n}{s}\right) > 0 \Rightarrow \frac{n}{s} > r_n, \forall n > n_2$ $\Rightarrow \frac{r_n}{n} < \frac{1}{s} = \frac{1}{x_0} + \epsilon, \forall n > n_2$. Từ trên suy ra: $\forall n > \max\{n_1; n_2\}$ ta có $\left \frac{r_n}{n} - \frac{1}{x_0}\right < \epsilon$, với $\epsilon > 0$ nhỏ tùy ý. Như vậy $\lim \frac{r_n}{n} = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{\ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.	0.5														

Bài	Sơ lược lời giải	Điểm
3(5,0đ)	$\Delta SAM = \Delta SCN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{SMB} = \widehat{SNB} \Rightarrow SBNM$ nội tiếp. $\widehat{SMK} = \widehat{SBC} = \widehat{SAK} \Rightarrow SMAK$ nội tiếp (C_1) . $\widehat{SCN} = \widehat{SAM} = \widehat{SKN} \Rightarrow SNCK$ nội tiếp (C_2) và $R_{(C_1)} = R_{(C_2)}$.	2
		
	Gọi U là điểm chính giữa cung AM của (C_1) , V là điểm chính giữa cung CN của (C_2) , do $R_{(C_1)} = R_{(C_2)}$ và $AM = CN \Rightarrow UA = VC, SU = SV$ đồng thời U, V, P, Q cùng nằm trên đường phân giác trong của $\widehat{NKC}$.	1
	Mặt khác $UA = UP, VC = VQ$	1
	$\Rightarrow \Delta SUP = \Delta SVQ$ (c.g.c) suy ra $SP = SQ$.	1
4(5,0đ)	a. Đặt $m = a^k - 1$ thì $a^k \equiv 1 \pmod{m}$. Gọi $h = \text{ord}_m(a)$ thì $h \mid k$ và $h \mid \varphi(m)$. Do $h \mid k$ nên $h \leq k$.	1
	Mặt khác: $a^h \equiv 1 \pmod{m}$ nên $a^h \geq 1 + m = a^k$, suy ra $h \geq k$. Từ đó ta có $h = k$ suy ra $k \mid \varphi(m) = \varphi(a^k - 1)$.	1
	b. Giả sử m có phân tích tiêu chuẩn $m = \prod_{i=1}^t p_i^{k_i}$ thì $\varphi(m) = \prod_{i=1}^t p_i^{k_i-1}(p_i - 1)$. Do p là ước của $\varphi(m)$ nhưng không là ước của m nên $p \mid \prod_{i=1}^t (p_i - 1)$.	1
	Từ đây suy ra tồn tại $i \in \{1; 2; \dots; t\}$ sao cho $p \mid p_i - 1$ hay $p_i \equiv 1 \pmod{p}$.	1

<i>Bài</i>	<i>Sơ lược lời giải</i>	<i>Điểm</i>
	c. Giả sử có hữu hạn số nguyên tố dạng $pn + 1$ là $q_1, q_2, \dots, q_k$. Đặt $a = pq_1q_2 \dots q_k$, $m = a^p - 1$. Theo a, $p \mid \varphi(a^p - 1)$ hay $p \mid \varphi(m)$. Do p là ước của $\varphi(m)$ nhưng không là ước của m nên theo b, tồn tại số nguyên tố q_{k+1} sao cho $q_{k+1} \equiv 1 \pmod{p}$, trong đó q_{k+1} là một ước nguyên tố của $m = a^p - 1$. Rõ ràng $q_{k+1} \neq q_i, \forall i \leq k$, vì nếu trái lại thì $q_{k+1} \mid a$ hay $q_{k+1} \mid 1$, vô lý. Vậy giả sử là sai, tức là có vô số số nguyên tố có dạng $pn + 1$.	1

Hướng dẫn khi chấm:

- Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược bài giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất chi tiết nhưng không được quá số điểm dành cho câu, phần đó.
- Có thể chia điểm thành từng phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm, không làm tròn điểm.
- Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi thống nhất trong cả tổ chấm và ghi vào biên bản.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NINH