

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$

b) Chứng minh rằng $P = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}}$ là số nguyên

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2xy + 8x + 4(y-4)^2 = 0$

b) Chứng minh rằng nếu m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $2022m^2 + m = 2023n^2 + n$ thì $2022(m+n)+1$ là số chính phương

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{4x^2 - 3x + 15} - 3x + 1 = 0$

b) Cho hai số thực a, b phân biệt. Quanh đường tròn viết n số thực đôi một khác nhau ($n \geq 3$) sao cho mỗi số bằng tổng của hai số đứng liền kề nó. Tìm n và các số được viết nếu hai số đầu tiên được viết lần lượt là a và b

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AA_1 , đường trung tuyến BB_1 và đường phân giác trong CC_1 . Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của $AA_1; BB_1; CC_1$ với (O) . Biết $A_1B_1C_1$ là tam giác đều

a) Chứng minh rằng tam giác ABC đều

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE , N là trung điểm của đoạn thẳng CD . I là giao điểm của AN và FM . Tính $\angle AIF$

c) Tia CI cắt AF và (O) lần lượt tại J và K . Chứng minh rằng I là trung điểm của CK . Tính tỉ số $\frac{JA}{JF}$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2b + ab^2 - 2(a+b+ab) = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2(a^3b + ab^3) + (1 + 2ab)^2 - 3}{2ab}$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

c) Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$. Tìm m để phương trình có hai

nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$

Tính được $\Delta' = (m-3)^2$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 0$ thì $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2m-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$

Theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-2) \\ x_1 x_2 = 2m-5 \end{cases}$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 3 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 3x_1 x_2 \Leftrightarrow 2(m-2) = 3(2m-5) \Leftrightarrow m = \frac{11}{4} (tm)$$

Vậy $m = \frac{11}{4}$

d) Chứng minh rằng $P = \sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}}$ là số nguyên

Ta có :

$$P^3 = 2 + \frac{10\sqrt{3}}{9} + 2 - \frac{10\sqrt{3}}{9} + 3\sqrt[3]{\left(2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}\right)\left(2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}\right)} \left[\sqrt[3]{2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10\sqrt{3}}{9}}\right]$$

$$\Leftrightarrow P^3 = 4 + 3\sqrt[3]{4 - \frac{300}{81}} \cdot P \Leftrightarrow P^3 = 4 + 2P$$

$$\Leftrightarrow P^3 - 2P - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 \\ P^2 + 2P + 2 = 0 (vn) \end{cases}$$

Vậy $P = 2$ hay P là số nguyên

Câu 2. (2,0 điểm)

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 2xy + 8x + 4(y-4)^2 = 0$ (1)

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^2 - 2(y-4)x + 4(y-4)^2 = 0 \text{ (2)}$$

Xem phương trình (2) là phương trình bậc hai ẩn x , ta cần tìm điều kiện của y để phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow (y-4)^2 - 4(y-4)^2 = -3(y-4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow x = 2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x; y) = (2; 0)$

d) Chứng minh rằng nếu m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $2022m^2 + m = 2023n^2 + n$ thì $2022(m+n)+1$ là số chính phương

$$2022m^2 + m = 2023n^2 + n \Leftrightarrow 2022m^2 - 2022n^2 + m - n = n^2$$

$$\Leftrightarrow (m-n)(2022m+2022n+1)=n^2 \quad (1)$$

Th1 : Với $m=n \Rightarrow (1) \Leftrightarrow m=n=0 \Rightarrow 2022(m+n)+1=1$ là số chính phương

Th2: Với $m \neq n \Rightarrow m-n > 0$. Gọi $(m-n; 2022m+2022n+1)=d$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-n : d \\ 2022m+2022n+1 : d \end{cases} \Rightarrow n^2 : d^2 \Rightarrow n : d \Rightarrow m : d$$

$$\Rightarrow 2022m+2022n : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d=1 \Rightarrow (m-n; 2022m+2022n+1)=1 \text{ hay } m-n \text{ và}$$

$2022m+2022n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Mặt khác $(m-n)(2022m+2022n+1)=n^2$ là số chính phương nên suy ra $2022(m+n)+1$ là số chính phương (đpcm)

Câu 3. (2,0 điểm)

c) Giải phương trình $\sqrt{4x^2-3x+15}-3x+1=0 \quad (1)$

$$\text{Phương trình } \sqrt{4x^2-3x+15}=3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 4x^2-3x+15=(3x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 4x^2-3x+15=9x^2-6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 5x^2-3x-14 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Vậy $x=2$

d) Cho hai số thực a, b phân biệt. Quanh đường tròn viết n số thực đôi một khác nhau ($n \geq 3$) sao cho mỗi số bằng tổng của hai số đứng liền kề nó. Tìm n và các số được viết nếu hai số đầu tiên được viết lần lượt là a và b

Đánh số các số được viết theo thứ tự là $a_1; a_2; \dots; a_n$ với $a_1=a; a_2=b$. Ta có :

$$a_1=a; a_2=b; a_3=b-a; a_4=-a; a_5=-b; a_6=a-b; a_7=a \equiv a_1$$

Suy ra $n \leq 6$. Mà $n \geq 3 \Rightarrow n \in \{3; 4; 5; 6\}$

$$\text{Th1: } n=3 \Rightarrow a_1=a; a_2=b; a_3=b-a$$

$$\text{Vì } a_3=a_1+a_2 \Rightarrow b-a=b+a \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow a_2=a_3 \text{ (loại)}$$

$$\text{Th2: } n=4 \Rightarrow a_1=a; a_2=b; a_3=b-a; a_4=-a$$

$$\Rightarrow a_4=a_1+a_3 \Rightarrow -a=b \Rightarrow a_2=a_4 \text{ (ktm)}$$

$$\text{Th3: } n=5$$

$$\Rightarrow a_1=a; a_2=b; a_3=b-a; a_4=-a; a_5=-b$$

$$\Rightarrow a_5=a_1+a_4=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow a_2=a_5 \text{ (ktm)}$$

$$\text{Th4: } n=6$$

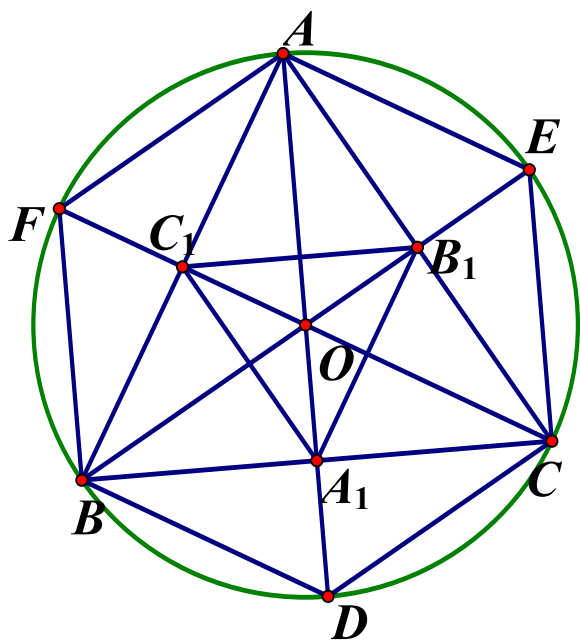
$$\Rightarrow a_1=a; a_2=b; a_3=b-a; a_4=-a; a_5=-b; a_6=a-b$$

Dễ thấy $a_6=a_1+a_5$ luôn thỏa mãn

Để các số a_i ($i=1, 6$) phân biệt thì $ab \neq 0; a \neq b; a \neq 2b; b \neq 2a$ (*)

Vậy $n = 6$ và các số được viết là $a_1 = a; a_2 = b; a_3 = b - a; a_4 = -a; a_5 = -b; a_6 = a - b$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AA_1 , đường trung tuyến BB_1 và đường phân giác trong CC_1 . Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của $AA_1; BB_1; CC_1$ với (O) . Biết $A_1B_1C_1$ là tam giác đều



d) Chứng minh rằng tam giác ABC đều

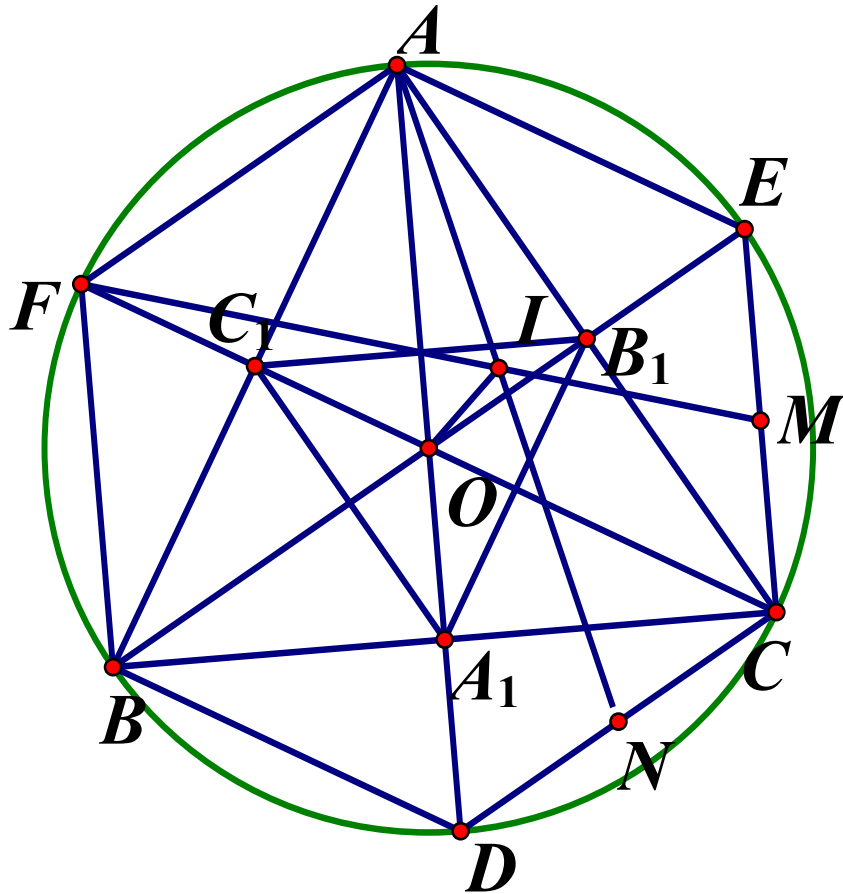
Xét tam giác AA_1C vuông tại A_1 có B_1 là trung điểm cạnh AC nên $A_1B_1 = \frac{1}{2}AC$

Suy ra $B_1C_1 = \frac{1}{2}AC \Rightarrow \triangle AC_1C$ vuông tại C_1 , mà CC_1 là đường phân giác của $\angle C$ nên C_1 là trung điểm cạnh AB

Lại có $A_1C_1 = B_1C_1 = \frac{1}{2}AC$ nên A_1C_1 là đường trung bình của tam giác ABC , suy ra A_1 là trung điểm cạnh BC

Vậy $A_1; B_1; C_1$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB nên $\triangle ABC$ đều (đpcm)

- e) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CE , N là trung điểm của đoạn thẳng CD .
 I là giao điểm của AN và FM . Tính $\angle AIF$



Vì $\triangle ABC$ đều nên $AFBDCE$ là lục giác đều

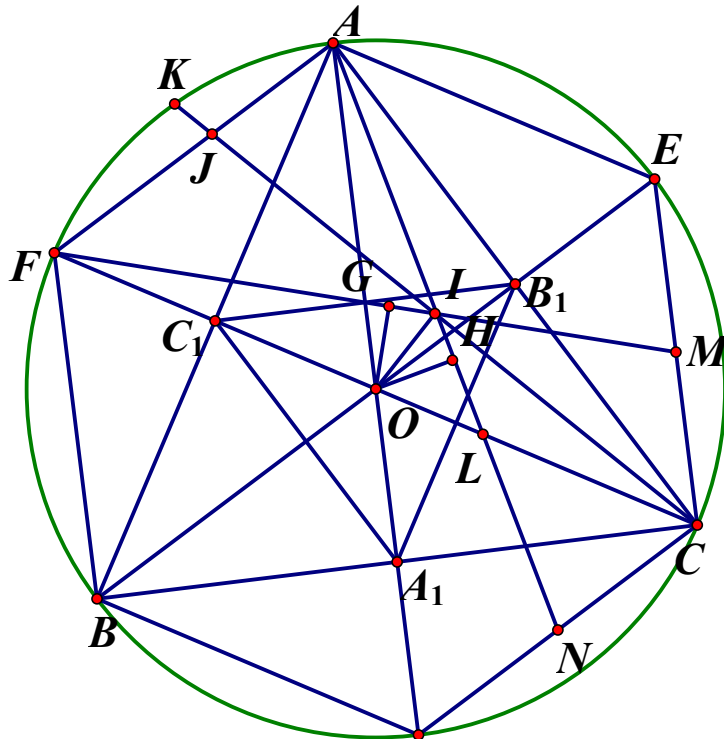
Do đó $\widehat{AF} = \widehat{FB} = \widehat{BD} = \widehat{DC} = \widehat{CE} = \widehat{EA} = 60^\circ$

Xét $\triangle FCM$ và $\triangle ADN$ có $FC = AD$, $CM = CN$, $\angle FCM = \angle ADN = 60^\circ$

Suy ra $\triangle FCM = \triangle ADN (c.g.c) \Rightarrow \angle DAN = \angle CFM$

$\Rightarrow \angle OAI = \angle OFI \Rightarrow OIAF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle AIF = \angle AOF = 60^\circ$

f) Tia CI cắt AF và (O) lần lượt tại J và K . Chứng minh rằng I là trung điểm của CK . Tính tỉ số $\frac{JA}{JF}$



Ta có $\triangle OCE$ và $\triangle OCD$ là hai tam giác đều bằng nhau nên $OM = ON = \frac{1}{2} DE$

Lại có MN là đường trung bình $\triangle CED \Rightarrow MN = \frac{1}{2} DE. \Rightarrow \triangle OMN$ đều

$\Rightarrow \angle MON = \angle MIN = 60^\circ \Rightarrow M, I, O, N$ cùng thuộc một đường tròn

Lại có $\angle OMC = \angle ONC = 90^\circ \Rightarrow O, N, M, C$ cùng thuộc đường tròn đường kính OC

Vậy 5 điểm O, I, M, C, N cùng thuộc một đường tròn đường kính OC

Suy ra $\angle OIC = \angle OMC = 90^\circ \Rightarrow OI \perp CK \Rightarrow I$ là trung điểm của CK

Từ O kẻ $OG \perp FM, OH \perp AN$. Gọi L là giao của AN, CF

Ta có $\triangle AOH = \triangle FOG \Rightarrow OG = OH \Rightarrow \triangle OGI = \triangle OHI \Rightarrow \angle GIO = \angle HIO$

$\Rightarrow OI$ là phân giác của $\angle FIL \Rightarrow \frac{OL}{OF} = \frac{IL}{IF}$

Mà L là trọng tâm $\triangle ADC \Rightarrow \frac{OL}{OF} = \frac{IL}{IF} = \frac{1}{3} \Rightarrow IF = 3IL(1)$

Gọi bán kính của (O) là R nên $CE = R$

Xét $\triangle ECF$ vuông tại E có $EF = CE \cdot \tan \angle ECF = R \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3}$

$\Rightarrow FM = \sqrt{EF^2 + EM^2} = \sqrt{3R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{13}}{2}$

Mà tứ giác $OIMC$ nội tiếp nên $FI \cdot FM = FO \cdot FC = 2R^2$

$$\Rightarrow IF = \frac{2R^2}{FM} = \frac{4\sqrt{13}R}{13} \Rightarrow IL = \frac{IF}{3} = \frac{4\sqrt{13}R}{39}$$

Vì tứ giác $OIAF$ nội tiếp nên :

$$LO.LF = IL.AL = \frac{4}{9}R^2 \Rightarrow AL = \frac{\sqrt{13}R}{3} \Rightarrow AI + IL = \frac{R\sqrt{13}}{3} \Rightarrow AI = \frac{3\sqrt{13}R}{13}$$

Dễ có $\angle NIC = \angle NOC = 30^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}\angle NIM \Rightarrow IJ$ là đường phân giác trong góc I của

$$\Delta AIF \Rightarrow \frac{JA}{JF} = \frac{IA}{IF} = \frac{3}{4}$$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2b + ab^2 - 2(a + b + ab) = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2(a^3b + ab^3) + (1 + 2ab)^2 - 3}{2ab}$

Ta có :

$$a^2b + ab^2 - 2(a + b + ab) = 0 \Leftrightarrow ab(a + b) = 2(a + b) + 2ab$$

$$\Leftrightarrow a + b = \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + 2 \geq \frac{8}{a+b} + 2 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2(a+b) - 8 \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 4$$

Lại có

$$a^2b + ab^2 - 2(a + b + ab) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{ab} + \frac{2}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{ab} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a+b}$$

$$P = \frac{2(a^3b + ab^3) + (1 + 2ab)^2 - 3}{2ab} = \frac{2ab(a^2 + b^2) + (1 + 2ab)^2 - 3}{2ab}$$

$$= a^2 + b^2 + \frac{(1 + 2ab)^2 - 3}{2ab} = (a+b)^2 + 2 - \frac{1}{ab}$$

$$= (a+b)^2 + 2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+b} \right) = (a+b)^2 + \frac{1}{a+b} + \frac{3}{2}$$

$$= (a+b)^2 + \frac{64}{a+b} + \frac{64}{a+b} - \frac{127}{a+b} + \frac{3}{2} \geq 3\sqrt{(a+b)^2 \cdot \frac{64}{a+b} \cdot \frac{64}{a+b}} - \frac{127}{4} + \frac{3}{2} = \frac{71}{4}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{71}{4} \Leftrightarrow a = b = 2$$