

Câu I. (3,0 điểm)

- 1) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$
- 2) Tìm m để các đường thẳng : $y = 2x + 4(d), y = 3x + 5(d'), y = -2mx + m - 3(\Delta)$ cùng đi qua một điểm
- 3) Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương

Câu II. (3,0 điểm)

- 1) Tìm x, y nguyên thỏa mãn $xy + 2x + y - 1 = 0$
- 2) Một cửa hàng điện máy thực hiện chương trình khuyến mãi giảm giá tất cả các mặt hàng 10% theo giá niêm yết, và nếu hóa đơn khách hàng trên 10 triệu sẽ được giảm thêm 2% số tiền trên hóa đơn, hóa đơn trên 15 triệu sẽ được giảm thêm 4% số tiền trên hóa đơn, hóa đơn trên 40 triệu sẽ được giảm thêm 8% số tiền trên hóa đơn. Ông An muốn mua một ti vi với giá niêm yết là 9 200 000 đồng và một tủ lạnh với giá niêm yết là 7 100 000 đồng. Hỏi với chương trình khuyến mãi của cửa hàng, ông An phải trả bao nhiêu tiền
- 3) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - 6y^2 = xy \\ 3x^2 + 2y = xy + x \end{cases}$$

Câu III. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại B ($BC > AB$) nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính $AC = 2R$. Kẻ dây cung BD vuông góc với AC , H là giao điểm của AC và BD . Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với H qua A . Đường tròn tâm O' đường kính EC cắt đoạn BC tại I (I khác C)

- 1) Chứng minh rằng $CI.CA = CE.CB$
- 2) Chứng minh rằng ba điểm D, I, E thẳng hàng
- 3) Chứng minh rằng: HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC
- 4) Khi B thay đổi thì H thay đổi, xác định vị trí của H trên AC để diện tích tam giác $O'IH$ lớn nhất

Câu IV. (1,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các cặp số thực x, y dương thỏa mãn điều kiện :
$$\sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} + \sqrt{6x^2 + 36xy + 22y^2} = x^2 + y^2 + 32$$
- 2) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = a + b$
Chứng minh rằng : $a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 \leq 4$

ĐÁP ÁN

Câu I. (3,0 điểm)

4) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

$$A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2$$

5) Tìm m để các đường thẳng : $y = 2x + 4(d)$, $y = 3x + 5(d')$, $y = -2mx + m - 3(\Delta)$

cùng đi qua một điểm

Tọa độ giao điểm của $(d), (d')$ là $A(-1; -2)$

Đề $(\Delta), (d), (d')$ cùng đi qua 1 điểm $\Leftrightarrow A \in (\Delta)$

$$\Rightarrow -2m \cdot (-1) + m - 3 = -2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$$

Vậy $m = \frac{1}{3}$ thì thỏa đề

6) Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương

Phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có 2 nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow m > \frac{1}{2}$$

Vậy $m > \frac{1}{2}$ thì thỏa đề

Câu II. (3,0 điểm)

4) Tìm x, y nguyên thỏa mãn $xy + 2x + y - 1 = 0$

$$xy + 2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x(y+2) + (y+2) - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(x+1) = 3$$

Vì x, y nguyên nên $(y+2), (x+1) \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$

Các cặp số nguyên cần tìm $(x; y) = (-4; -3); (-2; -5); (0; 1); (2; -1)$

5) Một cửa hàng điện máy thực hiện chương trình khuyến mãi giảm giá tất cả các mặt hàng 10% theo giá niêm yết, và nếu hóa đơn khách hàng trên 10 triệu sẽ được giảm thêm 2% số tiền trên hóa đơn, hóa đơn trên 15 triệu sẽ được giảm thêm 4% số tiền trên hóa đơn, hóa đơn trên 40 triệu sẽ được giảm thêm 8% số tiền trên hóa đơn. Ông An muốn mua một ti vi với giá niêm yết là 9 200 000 đồng và một tủ lạnh với giá niêm yết là 7 100 000 đồng. Hỏi với chương trình khuyến mãi của cửa hàng, ông An phải trả bao nhiêu tiền

Tổng giá trị 1 chiếc ti vi và 1 chiếc tủ lạnh ông An mua là 16 300 000 đồng

Số tiền ông An phải trả khi được giảm giá 10% là :

$$16300000.90\% = 14670000 (\text{đồng})$$

Vì số tiền trên hóa đơn của ông An là 14 700 000 (đồng) nên ông An được giảm thêm 2% số tiền in trên hóa đơn

$$\text{Vậy số tiền ông An phải trả là } 14670000.98\% = 14376600 (\text{đồng})$$

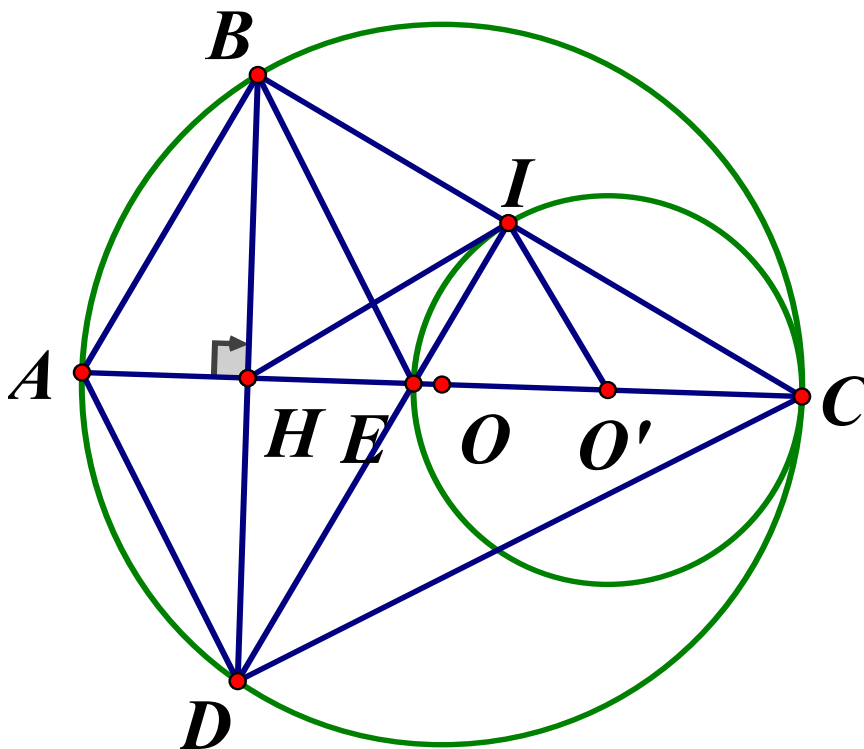
6) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - 6y^2 = xy \\ 3x^2 + 2y = xy + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(2x+3y) = 0 \\ 3x^2 + 2y = xy + x \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2y \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 12y^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \\ 2x = -3y \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{2}{3}x^2 + x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{7}{11} \Rightarrow y = \frac{-14}{33} \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy nghiệm (x;y) là $(0;0), \left(\frac{7}{11}; \frac{-14}{33}\right)$

Câu III. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại B ($BC > AB$) nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính $AC = 2R$. Kẻ dây cung BD vuông góc với AC , H là giao điểm của AC và BD . Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với H qua A . Đường tròn tâm O' đường kính EC cắt đoạn BC tại I (I khác C)



5) Chứng minh rằng $CI.CA = CE.CB$

Xét $\triangle CIE$ và $\triangle CBA$ có $\angle ICE$ chung; $\angle EIC = \angle ABC = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle CIE \sim \triangle CBA(g.g) \Rightarrow \frac{CI}{CB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow CI.CA = CE.CB(dfcm)$$

6) Chứng minh rằng ba điểm D, I, E thẳng hàng

Ta có $EI \perp BC$ (do $\angle EIC$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) (1)

Vì $BD \perp AC$ tại H , và $HA = HE, HB = HD$ nên tứ giác $ABED$ là hình thoi

Suy ra $DE \parallel AB$, mà $AB \perp BC$ nên $DE \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có 3 điểm D, E, I thẳng hàng

7) Chứng minh rằng: HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC

Ta có tứ giác $DHIC$ nội tiếp đường tròn đường kính DC nên ta có

$$\angle BIH = \angle BDC (=180^\circ - \angle HIC)$$

Lại có $\angle BAC = \angle IEO'$ (đồng vị), $\angle IEO' = \angle O'IE$ (tam giác cân)

Suy ra $\angle BIH = \angle O'IE$ mà $\angle BIH + \angle HIE = 90^\circ$ nên $\angle HIE + \angle O'IE = 90^\circ$

$\Rightarrow HI \perp O'I$ hay HI là tiếp tuyến của (O')

8) Khi B thay đổi thì H thay đổi, xác định vị trí của H trên AC để diện tích tam giác $O'IH$ lớn nhất

Ta có :

$$2S_{O'IH} = O'I.HI \leq \frac{O'I^2 + HI^2}{2} = \frac{O'H^2}{2} = \frac{AC^2}{4} = \frac{R^2}{2} \Rightarrow S_{O'IH} \leq \frac{R^2}{4}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} O'I.HI = \frac{R^2}{2} \\ O'I = HI \end{cases} \Rightarrow O'I = HI = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ (Do } O'I > 0; HI > 0)$$

$$\text{Ta có } O'H = R, O'E = O'I = \frac{R}{\sqrt{2}} \text{ suy ra } AH = HE = R - \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy } AH = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} \text{ thì diện tích tam giác } O'IH \text{ lớn nhất}$$

Câu IV. (1,0 điểm)

3) Tìm tất cả các cặp số thực x, y dương thỏa mãn điều kiện :

$$\sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} + \sqrt{6x^2 + 36xy + 22y^2} = x^2 + y^2 + 32$$

$$\text{Ta có : } 22x^2 + 36xy + 6y^2 = (5x + 3y)^2 - 3(x - y)^2 \leq (5x + 3y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} \leq 5x + 3y \text{ (do } x, y \text{ dương)}$$

Tương tự ta có :

$$6x^2 + 36xy + 22y^2 = (3x + 5y)^2 - 3(x - y)^2 \leq (3x + 5y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{6x^2 + 36xy + 22y^2} \leq 3x + 5y, (x, y > 0)$$

$$\text{Vậy } \sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} + \sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} \leq 8(x+y)(1)$$

$$\text{Ta có : } (x-4)^2 + (y-4)^2 \geq 0 (\forall x, y)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 32 \geq 8(x+y)(2)$$

$$\text{Vậy } \sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} + \sqrt{6x^2 + 36xy + 22y^2} = x^2 + y^2 + 32 \Leftrightarrow x = y = 4$$

4) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = a + b$

Chứng minh rằng : $a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 \leq 4$

Nếu $a + b = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$, khi đó bất cần chứng minh đúng

Nếu $a + b \neq 0 \Rightarrow a + b = a^2 + b^2 > 0$. Ta có :

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow a+b \geq \frac{(a+b)^2}{2} \Leftrightarrow 2(a+b) \geq (a+b)^2 \Rightarrow a+b \leq 2$$

$$\text{Ta có } a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + ab(a+b) = (a+b)^2$$

$$\text{Vì } 0 < a+b \leq 2 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 4 (đpcm)$$