

**Câu 1** (5,0 điểm). Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x-1+\frac{1}{x^2+3}=y+\frac{1}{y^2+2y+4} \\ \sqrt{2x^2-9y}+3=\sqrt{2y-1}+3\sqrt{x-3} \end{cases} \quad \text{với } x, y \in \mathbb{R}.$$

| Ý           | Nội dung                                                                                                                                                                                  | Điểm       |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5,0đ</b> | + Điều kiện xác định: $x \geq 3$ , $y \geq \frac{1}{2}$ và $2x^2 - 9y \geq 0$ .                                                                                                           | <b>0,5</b> |
|             | + Phương trình đầu tiên của hệ có dạng $f(x) = f(y+1)$ với $f(t) = t + \frac{1}{t^2+3}$ .                                                                                                 | <b>1,0</b> |
|             | Ta có $f'(t) = 1 - \frac{2t}{(t^2+3)^2} = \frac{(t-1)^2 + t^4 + 5t^2 + 8}{(t^2+3)^2} > 0, \forall t$ , do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ . Từ đó dẫn đến $x = y+1$ hay $y = x-1$ . | <b>1,0</b> |
|             | + Thay $y = x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ thu được $\sqrt{2x^2-9x+9}+3=\sqrt{2x-3}+3\sqrt{x-3}$ (với điều kiện $x \geq 3$ )                                                        | <b>0,5</b> |
|             | $\Leftrightarrow (\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{2x-3}-3)=0$                                                                                                                                         | <b>1,0</b> |
|             | $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3}=1 \\ \sqrt{2x-3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=6. \end{cases}$                                                           | <b>0,5</b> |
|             | Với $x=4$ thì $y=3$ ; với $x=6$ thì $y=5$ . Các giá trị này đều thỏa mãn các điều kiện xác định nêu trên.<br>+ Vậy hệ có đúng hai bộ nghiệm là $(x; y) = (4; 3)$ , $(x; y) = (6; 5)$ .    | <b>0,5</b> |

**Câu 2** (4,0 điểm). Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = 2$  và  $u_{n+1} = \frac{u_n(2u_n^2+2)}{2u_n^2-u_n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

a) Tính giới hạn  $\lim \left( \frac{1}{u_1^2+1} + \frac{1}{u_2^2+1} + \dots + \frac{1}{u_n^2+1} \right)$ .

b) Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt  $v_n = n^a \cdot u_n^2$ . Tìm tất cả các giá trị thực của  $a$  để dãy số  $(v_n)$  có giới hạn hữu hạn.

| Ý                        | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Điểm       |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>2a</b><br><b>2,5đ</b> | <p>+ Chỉ ra được <math>u_n &gt; 0, \forall n \in \mathbb{N}^*</math>.</p> <p>+ Suy ra <math>u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - u_n + 2} &gt; 0, \forall n \in \mathbb{N}^*</math>, do đó dãy <math>(u_n)</math> tăng ngặt.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>1,0</b> |
|                          | <p>+ Giả sử dãy số <math>(u_n)</math> bị chặn trên, khi đó theo tiêu chuẩn Weierstrass thì dãy số <math>(u_n)</math> hội tụ về số thực <math>L</math> mà <math>L &gt; u_1 = 2</math>.</p> <p>Từ <math>u_{n+1} = \frac{u_n(2u_n^2 + 2)}{2u_n^2 - u_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^*</math>, lấy giới hạn của hai vế khi <math>n \rightarrow +\infty</math> thu được <math>L = \frac{L(2L^2 + 2)}{2L^2 - L + 2}</math> hay <math>2L^3 - L^2 + 2L = 2L^3 + 2L \Leftrightarrow L = 0</math>, mâu thuẫn với <math>L &gt; 2</math>. Chứng tỏ dãy số <math>(u_n)</math> không bị chặn trên, do đó <math>\lim u_n = +\infty</math>.</p> | <b>0,5</b> |
|                          | + Chứng minh được $\frac{1}{u_k^2 + 1} = 2\left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}\right), \forall k \in \mathbb{N}^*$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>0,5</b> |
|                          | <p>Suy ra <math>\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^2 + 1} = 2\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = 1 - \frac{2}{u_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*</math>.</p> <p>Do đó <math>\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^2 + 1} = \lim \left(1 - \frac{2}{u_{n+1}}\right) = 1</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>0,5</b> |
|                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |            |
| <b>2b</b><br><b>1,5đ</b> | + Ta có $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lim \frac{u_n^2}{2u_n^2 - u_n + 2} = \lim \frac{1}{2 - \frac{1}{u_n} + \frac{2}{u_n^2}} = \frac{1}{2}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>0,5</b> |
|                          | + Theo định lí Cesaro ta thu được $\lim\left(\frac{u_n}{n}\right) = \frac{1}{2}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>0,5</b> |
|                          | <p>+ Từ <math>v_n = n^a \cdot u_n^2 = \left(\frac{u_n}{n}\right)^2 \cdot n^{a+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*</math> suy ra <math>\lim v_n = \begin{cases} \frac{1}{4} &amp; \text{khi } a + 2 = 0 \\ 0 &amp; \text{khi } a + 2 &lt; 0 \\ +\infty &amp; \text{khi } a + 2 &gt; 0. \end{cases}</math></p> <p>Vậy dãy số <math>(v_n)</math> có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi <math>a \leq -2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                           | <b>0,5</b> |

**Câu 3** (3,0 điểm). Xét hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn:

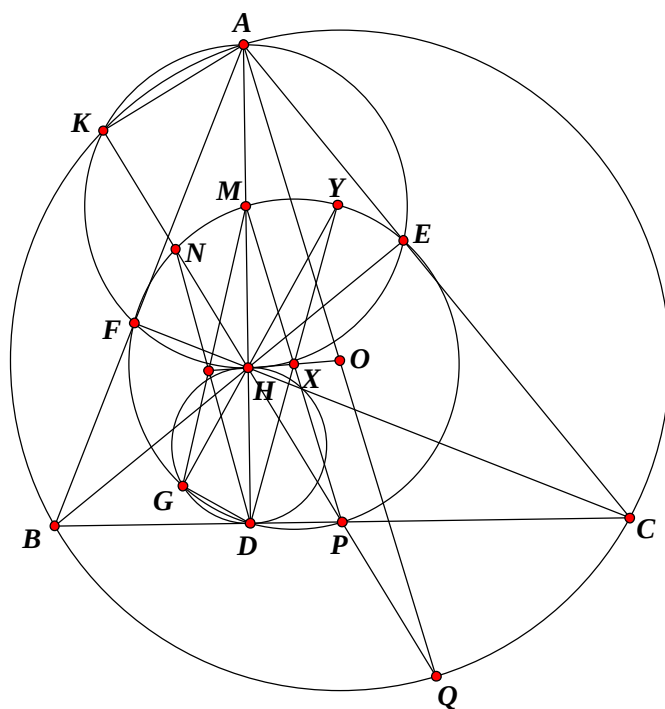
$$f(x^2 - xf(y)) + f(xy) = (x - y)f(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Chứng minh rằng  $f(x)$  là hàm số lẻ.  
b) Tìm tất cả các hàm số  $f$  thỏa mãn yêu cầu.

| Ý                        | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Điểm       |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3a</b><br><b>1,0đ</b> | <p>Giả sử hàm số <math>f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math> thỏa mãn</p> $(1): f(x^2 - xf(y)) + f(xy) = (x - y)f(x) + xf(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$ <p>Ta kí hiệu <math>P(u;v)</math> chỉ việc thay thế <math>(x; y) = (u;v)</math> vào (1).</p> <p>+ <math>P(0;0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0.</math></p> <p>+ <math>P(x;0) \Rightarrow f(x^2) = xf(x), \forall x</math> (2).</p> | <b>0,5</b> |
|                          | + Trong (2) thay $x$ bởi $-x$ ta thu được $xf(x) = f(x^2) = -xf(-x), \forall x$ . Suy ra $f(-x) = -f(x), \forall x \neq 0$ . Kết hợp $f(0) = 0$ ta suy được $f(x)$ là hàm số lẻ.                                                                                                                                                                                                                                | <b>0,5</b> |
| <b>3b</b><br><b>2,0đ</b> | <p>+ <b>Trường hợp 1:</b> <math>f(x)</math> chỉ bằng 0 tại <math>x = 0</math>.</p> $P(x;x) \Rightarrow f(x^2 - xf(x)) + f(x^2) = xf(x), \forall x$ $\Rightarrow f(x^2 - xf(x)) = 0, \forall x \text{ (do (2))} \Rightarrow x^2 - xf(x) = 0, \forall x \Rightarrow f(x) = x, \forall x \neq 0.$                                                                                                                  | <b>0,5</b> |
|                          | Kết hợp $f(0) = 0$ ta được $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ . Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu.                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>0,5</b> |
|                          | <p>+ <b>Trường hợp 2:</b> Tồn tại <math>a \neq 0</math> mà <math>f(a) = 0</math>.</p> $P(1;a) \Rightarrow f(1) + 0 = (1 - a)f(1) + 0 \Rightarrow f(1) = 0.$                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>0,5</b> |
|                          | $P(x;1) \Rightarrow f(x^2) + f(x) = (x - 1)f(x), \forall x.$ <p>Kết hợp với (2) thu được <math>f(x) = 0, \forall x</math>. Thử lại thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu.</p> <p>+ Vậy có đúng hai hàm số thỏa mãn yêu cầu là <math>f(x) = 0, \forall x; f(x) = x, \forall x</math>.</p>                                                                                                                             | <b>0,5</b> |

**Câu 4** (4,0 điểm). Cho tam giác  $ABC$  có  $AB < AC$  và nội tiếp đường tròn  $(O)$ , các đường cao  $AD, BE, CF$  đồng quy tại  $H$ . Lấy điểm  $K$  thuộc  $(O)$  sao cho  $\widehat{AKH} = 90^\circ$  và lấy điểm  $G$  thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DEF$  sao cho  $\widehat{DGH} = 90^\circ$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các đoạn  $HA, HK$ .

- Gọi  $P$  là trung điểm của đoạn  $BC$ . Chứng minh ba điểm  $P, H, K$  thẳng hàng.
- Chứng minh rằng các đường thẳng  $GM$  và  $DN$  cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng Euler của tam giác  $ABC$ .



| Ý                        | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                              | Điểm       |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4a</b><br><b>2,0đ</b> | Kẻ đường kính $AQ$ của đường tròn $(O)$ . Khi đó ta có $\widehat{AKQ} = 90^0$ .<br>Kết hợp với $\widehat{AKH} = 90^0$ ta suy ra $K, H, Q$ thẳng hàng.                                                                                                 | <b>0,5</b> |
|                          | Mặt khác, dễ dàng chứng minh được tứ giác $BHCQ$ là hình bình hành nên $HQ$ đi qua trung điểm của $BC$ hay $H, P, Q$ thẳng hàng                                                                                                                       | <b>1,0</b> |
|                          | Suy ra $K, H, P, Q$ thẳng hàng.                                                                                                                                                                                                                       | <b>0,5</b> |
| <b>4b</b><br><b>2,0đ</b> | Kẻ đường kính $DY$ của đường tròn $(DEF)$ . Khi đó ta có $\widehat{DGY} = 90^0$ . Kết hợp với $\widehat{DGH} = 90^0$ ta suy ra $G, H, Y$ thẳng hàng                                                                                                   | <b>0,5</b> |
|                          | Ta có đường tròn $(DEF)$ là đường tròn Euler của tam giác $ABC$ nên $MP$ là đường kính của đường tròn $(DEF)$ và tâm $X$ của đường tròn $(DEF)$ là trung điểm của đoạn $OH$ , đồng thời $X$ là trung điểm của các đoạn $MP, DY$ .                     | <b>0,5</b> |
|                          | Ta có $XN = \frac{1}{2}OK$ nên $N$ thuộc đường tròn $(DEF)$ .                                                                                                                                                                                         | <b>0,5</b> |
|                          | Áp dụng định lý Pascal cho bộ 6 điểm $\begin{pmatrix} D & P & G \\ M & Y & N \end{pmatrix}$ ta có<br>$DY \cap MP = X, YG \cap PN = H$ , Suy ra $GM, DN, XH$ đồng quy.<br>Mà $XH$ là đường thẳng Euler của tam giác $ABC$ nên có điều phải chứng minh. | <b>0,5</b> |

**Câu 5 (4,0 điểm).**

a) Cho tập hợp  $X = \{1; 2; 3; \dots; 2025\}$ . Hỏi có bao nhiêu cách phân hoạch  $X$  thành ba tập hợp con khác rỗng?

**Cách 1**

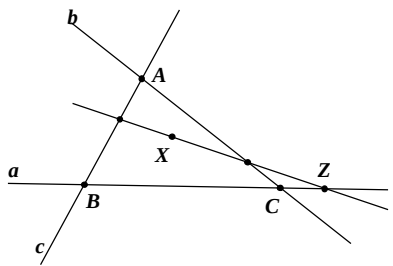
| Ý          | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                | Điểm |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 5a<br>2,0đ | Trước hết ta tính $N$ là số cách phân hoạch có quan tâm thứ tự các tập con.<br>Giả sử ta phân hoạch tập $X$ thành 3 tập $A, B, C$ , số cách phân hoạch tùy ý là $3^{2025}$ (mỗi phần tử trong $X$ có 3 cách chọn tập mà nó thuộc)                                                       | 0,5  |
|            | Gọi $X, Y, Z$ là tập các cách phân hoạch mà $A, B, C$ rỗng tương ứng, khi đó $X \cup Y \cup Z$ là tập các cách phân hoạch có ít nhất một tập rỗng.<br>Theo nguyên lý bù trừ ta có<br>$ X \cup Y \cup Z  =  X  +  Y  +  Z  -  X \cap Y  -  Y \cap Z  -  Z \cap X  +  X \cap Y \cap Z $ . | 0,5  |
|            | Ta có $ X  =  Y  =  Z  = 2^{2025}$ , $ X \cap Y  =  Y \cap Z  =  Z \cap X  = 1$ và $ X \cap Y \cap Z  = 0$ ,<br>nên $ X \cup Y \cup Z  = 3 \cdot 2^{2025} - 3$ . Suy ra $N = 3^{2025} - 3 \cdot 2^{2025} + 3$ .                                                                         | 0,5  |
|            | Do mỗi bộ 3 tập được tính 6 lần nên kết quả cần tính là $\frac{N}{6} = \frac{3^{2025} - 2 \cdot 2^{2025} + 1}{2}$ .                                                                                                                                                                     | 0,5  |

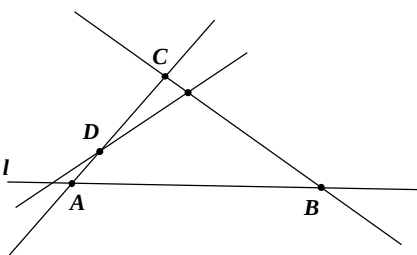
**Cách 2**

| Ý          | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Điểm |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 5a<br>2,0đ | Với số nguyên dương $n \geq 3$ , gọi $u_n$ là số cách phân hoạch $X_n = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ thành 3 tập hợp con khác rỗng. Ta có $u_3 = 1$ .<br>Xét phân hoạch $X_{n+1} = A \cup B \cup C$ , trong đó $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, C \neq \emptyset$ .<br>Có các trường hợp:<br>- <b>Trường hợp 1.</b> $C = \{n+1\}$ và $\{1, 2, 3, \dots, n\} = A \cup B$ , trong đó $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ . Số cách phân hoạch trong trường hợp này là $2^{n-1} - 1$ . | 0,5  |
|            | - <b>Trường hợp 2.</b> Phân hoạch tập $\{1; 2; 3; \dots; n\}$ thành ba tập khác rỗng rồi cho phần tử $n+1$ vào một trong ba tập đó. Số cách thực hiện là $3u_n$ .<br>Suy ra $u_{n+1} = 3u_n + 2^{n-1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ .                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5  |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                     |            |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|  | <p>Như vậy ta có công thức truy hồi <math>\begin{cases} u_3 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2^{n-1} - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3. \end{cases}</math></p> <p>Tìm được <math>u_n = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3.</math></p> | <b>0,5</b> |
|  | <p>Áp dụng với <math>n = 2025</math> ta được số cách chia thỏa mãn đề bài là</p> $u_{2025} = \frac{3^{2024} - 2^{2025} + 1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3.$                                                                                              | <b>0,5</b> |

b) Cho số nguyên dương  $n \geq 4$  và  $n$  đường thẳng trên mặt phẳng sao cho không có hai đường thẳng song song và không có ba đường thẳng đồng quy. Các đường thẳng này chia mặt phẳng thành các phần. Chứng minh có ít nhất  $\frac{2}{3}(n-1)$  phần là tam giác.

| <b>Ý</b>           | <b>Nội dung</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>Điểm</b>                                                                                            |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>5b<br/>2,0đ</b> | <p>Kí hiệu <math>T</math> là tập các đường thẳng và <math>S</math> là tập các giao điểm của các đường thẳng đã cho.</p> <p>Chia <math>T</math> thành hai tập: <math>T_1</math> chứa các đường mà tất cả các điểm trong <math>S</math> nằm về một nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng này và <math>T_2 = T \setminus T_1</math>.</p> <p>Ta chứng minh <math> T_1  \leq 2</math>.</p> <p>Giả sử <math> T_1  \geq 3</math>, <math>T_1</math> chứa các đường <math>a, b, c</math>, khi đó các đường này tạo thành tam giác <math>ABC</math> đồng thời các điểm còn lại của <math>S</math> đều nằm trong tam giác này (nếu có điểm nằm ngoài tam giác thì có một trong ba đường không thuộc <math>T_1</math>, mâu thuẫn).</p> <p>Do trong <math>S</math> có nhiều hơn 3 điểm nên có điểm <math>X</math> nằm trong tam giác <math>ABC</math>. Một đường thẳng bất kỳ qua <math>X</math> chỉ cắt đúng 2 cạnh của tam giác <math>ABC</math> nên phải có 1 giao điểm của đường này, giả sử với <math>a</math> nằm ngoài đoạn <math>BC</math> (sử dụng hình vẽ trên), điều này mâu thuẫn khi <math>b</math> trong <math>T_1</math>.</p> <p>Suy ra <math> T_1  \leq 2</math>, suy ra <math> T_2  \geq n - 2</math>.</p> |  <p><b>0,5</b></p> |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|  | <p>Với đường thẳng <math>l</math> trong <math>T_1</math>, xét các giao điểm tạo bởi <math>n-1</math> đường thẳng còn lại với nhau, sẽ có điểm <math>C</math> gần <math>l</math> nhất, điểm này giả sử là giao của <math>a, b</math>. Gọi <math>A, B</math> là giao điểm của <math>l</math> với <math>a, b</math> thì tam giác <math>ABC</math> là một trong các miền mà <math>n</math> đường thẳng này chia mặt phẳng.</p>  <p>Thật vậy, giả sử đây không phải là miền chia thì có đường thẳng khác cắt cạnh <math>CA</math> (hoặc <math>CB</math>) tại <math>D</math>, khi đó <math>D</math> gần <math>l</math> hơn <math>C</math>, mâu thuẫn với cách chọn <math>C</math>.</p> <p>Nghĩa là mỗi đường thẳng trong <math>T_1</math> ứng với ít nhất 1 tam giác là miền chia.</p> <p>Làm tương tự ta thấy mỗi đường thẳng trong <math>T_2</math> ứng với ít nhất 2 tam giác là miền chia.</p> | <b>0,5</b> |
|  | <p>Mỗi tam giác đang xét được đếm nhiều nhất 3 lần. Suy ra số tam giác là miền chia là <math>N \geq \frac{1}{3}(k + 2(n - k))</math> trong đó <math>k =  T_1  \in \{0, 1, 2\}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>0,5</b> |
|  | <p>Suy ra <math>N \geq \frac{2}{3}(n - 1)</math>, ta có điều phải chứng minh.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>0,5</b> |

**Chú ý:**

- Nếu thí sinh làm đúng, cách giải khác với hướng dẫn chấm, phù hợp kiến thức của chương trình thì tổ chấm thống nhất cho điểm thành phần đảm bảo tổng điểm như hướng dẫn quy định.
- Tổng điểm toàn bài không làm tròn.

----- HẾT -----