

HSG9 Tỉnh Cao Bằng 2021-2022

Câu 1. (3,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm x để biểu thức A có giá trị bằng 0,5.

Câu 2. (3,0 điểm)

Cho hàm số $y = (m-2)x + 2$ ($m \neq 2$) có đồ thị là đường thẳng (d).

1. Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ luôn âm.
2. Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc toạ độ đến đường thẳng (d) bằng 1.

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 15x - 3y = 3 \end{cases}$ (m là tham số).

Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thoả mãn $x > 0; y < 0$.

2. Tìm số a để đa thức $x^4 + ax^3 + x + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$.

Câu 4. (2,0 điểm) Tìm tất cả các số chính phương có 4 chữ số, biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị ta vẫn được một số chính phương.

Câu 5. (6,0 điểm) Cho điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính AB ($M \neq A; M \neq B; MA < MB$). Tia phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt AB tại C . Qua C , vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM, BM theo thứ tự tại D và H .

1. Chứng minh các điểm A, C, H, M cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.
2. Gọi E là hình chiếu của H trên tiếp tuyến tại A và F là hình chiếu của D trên tiếp tuyến tại B của đường tròn (O). Chứng minh: E, M, F thẳng hàng.
3. Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của tứ giác $ACHE$ và $BCDF$. Chứng minh rằng $CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $a + b + c + 2 = abc$.

Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq \frac{3}{2}$.

---Hết---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.(3,0 điểm) Cho biểu thức: $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức A .
2. Tìm x để biểu thức A có giá trị bằng 0,5.

Lời giải

1. ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 4, x \neq 9$

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 4, x \neq 9$.

2. Với $x \geq 0; x \neq 4, x \neq 9$ ta có

$$A = 0,5$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = 0,5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = 0,5(\sqrt{x}+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = 0,5\sqrt{x}+0,5$$

$$\Leftrightarrow 0,5\sqrt{x} = 2,5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 25 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

Vậy khi $A = 0,5$ thì $x = 25$.

Câu 2.(3,0 điểm) Cho hàm số $y = (m-2)x + 2$ ($m \neq 2$) có đồ thị là đường thẳng (d).

1. Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ luôn âm.
2. Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) bằng 1.

Lời giải

$$1. \text{ Ta có } y = 0 \Leftrightarrow (m-2)x + 2 = 0 \Leftrightarrow (m-2)x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2-m}$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = (m-2)x + 2$ ($m \neq 2$) cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{2}{2-m}; 0\right)$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ luôn âm

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2-m} < 0 \Leftrightarrow 2-m < 0 \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy $m > 2$ là giá trị cần tìm.

2. Đồ thị hàm số $y = (m-2)x + 2$ ($m \neq 2$) cắt trục hoành tại điểm $A\left(\frac{2}{2-m}; 0\right)$ suy ra

$$OA = \left|\frac{2}{2-m}\right| \text{ và cắt trục tung tại điểm } B(0; 2) \text{ suy ra } OB = 2$$

Gọi OH là khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d)

Xét tam giác OAB vuông tại O có OH là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{2-m}\right)^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{(2-m)^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Có } OH = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1^2} = \frac{(2-m)^2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{(2-m)^2}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow (2-m)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m = \sqrt{3} \\ 2-m = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 - \sqrt{3} \\ m = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 2 - \sqrt{3}$ hoặc $m = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 3.(4,0 điểm)

1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + 3y = m \\ 15x - 3y = 3 \end{cases}$ (m là tham số).

Tìm giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0; y < 0$.

2. Tìm số a để đa thức $x^4 + ax^3 + x + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 1. \begin{cases} 2x+3y=m \\ 15x-3y=3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 17x=m+3 \\ 15x-3y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{m+3}{17} \\ 15\cdot\frac{m+3}{17}-3y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{m+3}{17} \\ 3y=\frac{15m+45}{17}-3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{m+3}{17} \\ 3y=\frac{15m-6}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{m+3}{17} \\ y=\frac{5m-2}{17} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > 0; y < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+3}{17} > 0 \\ \frac{5m-2}{17} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ 5m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ 5m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < \frac{2}{5}$$

Vậy $-3 < m < \frac{2}{5}$ là giá trị cần tìm.

2. Ta có

$$\begin{aligned}
 &x^4 + ax^3 + x + 1 \\
 &= (x^4 + x) + ax^3 + 1 \\
 &= x(x^3 + 1) + a(x^3 + 1) + 1 - a \\
 &= (x + a)(x + 1)(x^2 - x + 1) + 1 - a
 \end{aligned}$$

Đa thức $x^4 + ax^3 + x + 1$ chia hết cho $x^2 - x + 1$

$$\Leftrightarrow \text{Đa thức } (x + a)(x + 1)(x^2 - x + 1) + 1 - a \text{ chia hết cho } x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 4.(2,0 điểm) Tìm tất cả các số chính phương có 4 chữ số, biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị ta vẫn được một số chính phương.

Lời giải

Gọi số chính phương cần tìm là $\overline{abcd}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}, 0 < a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$)

$$\Rightarrow \text{đặt } \overline{abcd} = n^2 \ (n \in \mathbb{N})$$

Theo bài ra ta có $\overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)}$ là số chính phương

$$\Rightarrow \text{đặt } \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} = m^2 \ (m \in \mathbb{N}) \text{ trong đó } 31 < n < m < 100$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)} \\
&= (a+1).1000 + (b+3).100 + (c+5).10 + d + 3 \\
&= a.1000 + b.100 + c.10 + d + 1000 + 300 + 50 + 3 \\
&= \overline{abcd} + 1353
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Suy ra } m^2 = n^2 + 1353 \Leftrightarrow m^2 - n^2 = 1353 \\
& \Rightarrow (m-n)(m+n) = 1353 = 3.11.41 = 33.41 = 11.123
\end{aligned}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} m-n=33 \\ m+n=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=37 \\ n=4 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}$$

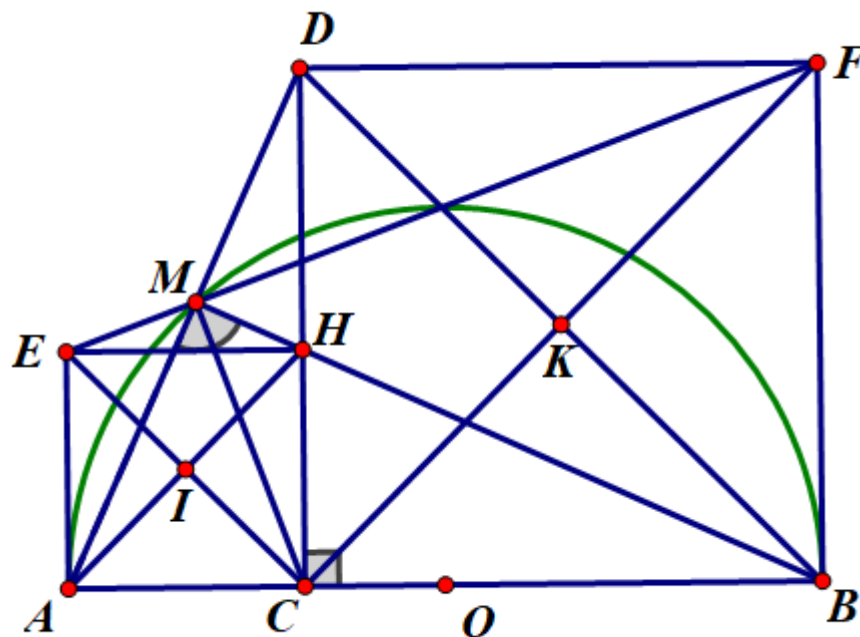
$$\text{TH2: } \begin{cases} m-n=11 \\ m+n=123 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=67 \\ n=56 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số chính phương cần tìm là $56^2 = 3136$.

Câu 5. (6,0 điểm) Cho điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính AB ($M \neq A; M \neq B; MA < MB$). Tia phân giác của $\widehat{AMB}$ cắt AB tại C . Qua C , vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM, BM theo thứ tự tại D và H .

1. Chứng minh các điểm A, C, H, M cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.
2. Gọi E là hình chiếu của H trên tiếp tuyến tại A và F là hình chiếu của D trên tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) . Chứng minh: E, M, F thẳng hàng.
3. Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của tứ giác $ACHE$ và $BCDF$. Chứng minh rằng $CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$.

Lời giải



1. Chứng minh các điểm A, C, H, M cùng thuộc một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

Xét (O) có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Theo giả thiết ta có $CH \perp AB \Rightarrow \widehat{ACH} = 90^\circ$

Xét tứ giác $ACHM$ có $\widehat{AMH} + \widehat{ACH} = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $ACHM$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .

Vậy các điểm A, C, H, M cùng thuộc đường tròn đường kính AH .

Gọi I là trung điểm của AH . Khi đó I là tâm của đường tròn đi qua các điểm A, C, H, M .

2. Gọi E là hình chiếu của H trên tiếp tuyến tại A và F là hình chiếu của D trên tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) . Chứng minh: E, M, F thẳng hàng.

Do MC là tia phân giác của góc $\widehat{AMB}$ nên $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BM}$ (1)

Xét tam giác $\triangle BHC$ và tam giác $\triangle BAM$ có: $\widehat{B}$ chung, $\widehat{HCB} = \widehat{BAM} = 90^\circ$
nên tam giác $\triangle BHC$ đồng dạng tam giác $\triangle BAM$

$$\text{Suy ra: } \frac{HC}{AM} = \frac{CB}{BM} \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{HC}{CB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AC = HC$.

Xét tứ giác $AEHC$ có $\widehat{HCA} = \widehat{CAE} = \widehat{AEH} = 90^\circ$ và $AC = HC$ nên tứ giác $AEHC$ là hình vuông. Khi đó $AH = EC$ và I là trung điểm của AH, EC

Ta có $MI = \frac{1}{2}AH$ (tam giác vuông AMH)

Mà $AH = EC$ nên $MI = \frac{1}{2}EC$ suy ra tam giác AMC vuông tại $M \Rightarrow \widehat{EMC} = 90^\circ$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{FMC} = 90^\circ$.

Suy ra $\widehat{EMC} + \widehat{FMC} = 180^\circ$. Vậy E, M, F thẳng hàng.

3. Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của tứ giác $ACHE$ và $BCDF$. Chứng minh rằng $CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$.

Theo chứng minh trên ta có tứ giác $ACHE$ là hình vuông nên $AC = \frac{CE}{\sqrt{2}}$

$$\text{Ta có: } S_1 = AC^2 = \frac{CE^2}{2} \Rightarrow 2S_1 = CE^2.$$

Chứng minh tương tự ta có $2S_2 = CF^2$.

Xét tam giác ECF có $\widehat{ECF} = \widehat{ECH} + \widehat{DCF} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ nên tam giác ECF vuông tại C .

Có $\widehat{EMC} = \widehat{FMC} = 90^\circ$ nên $CM \perp EF$.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{1}{CM^2} = \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CF^2} \Rightarrow CM^2 = \frac{CE^2 \cdot CF^2}{CE^2 + CF^2} = \frac{2S_1 \cdot S_2}{S_1 + S_2} \leq \frac{2S_1 \cdot S_2}{2\sqrt{S_1 S_2}} = \sqrt{S_1 S_2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $S_1 = S_2 \Leftrightarrow AM = BM$ (vô lý vì $MA < MB$).

$$\text{Vậy } CM^2 < \sqrt{S_1 S_2}$$

Câu 6. (2,0 điểm) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c + 2 = abc$.

$$\text{Chứng minh: } \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a + b + c + 2 = abc \Leftrightarrow \frac{a+b+c+2}{abc} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} + \frac{2}{abc} = 1$$

$$\text{Khi đó tồn tại } x, y, z > 0 \text{ sao cho } \frac{1}{a} = \frac{x}{y+z}; \frac{1}{b} = \frac{y}{x+z}; \frac{1}{c} = \frac{z}{y+x}.$$

Khi đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{z+x}} = \sqrt{\frac{x}{x+z} \cdot \frac{y}{y+z}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{bc}} = \sqrt{\frac{y}{x+z} \cdot \frac{z}{y+x}} = \sqrt{\frac{y}{x+y} \cdot \frac{z}{x+z}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{z}{x+z} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{ca}} = \sqrt{\frac{z}{x+y} \cdot \frac{x}{y+z}} = \sqrt{\frac{z}{y+z} \cdot \frac{x}{x+y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+y} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq \frac{3}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 2$.

---Hết---

Quy định khi gõ lời giải:

1. Phông chữ: Times New Roman, cỡ chữ 12
2. Công thức gõ trên mathtype, cỡ chữ 12.
3. Hình vẽ được vẽ trên các phần mềm: geogebra; Geometer's Sketchpad
4. Tên file: stt+ hsg+ tên tỉnh. Ví dụ: 1.hsg An Giang.docx