

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH BÌNH PHƯỚC**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN BÌNH PHƯỚC
NĂM HỌC 2023 - 2024**

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 01 trang)

Môn: **TOÁN** (chuyên)
Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (2.0 điểm) Cho $P = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{\sqrt{a} - 2}{1 - \sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
b) Tìm a nguyên để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (4.0 điểm)

- a) Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$, m là tham số.
Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $5x_1 + 2x_2 = 1$.

- b) Giải phương trình: $(x + 4)(x - 2) = 2\sqrt{x^2 + 2x - 5}$.

- c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 7x - 5y + 6 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + 9x + 9 = \sqrt{2x + y + 2} + \sqrt{x + 4y + 1} \end{cases}$$

Câu 3 (1.0 điểm)

- a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$.
b) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 24.

Câu 4 (2.0 điểm) Cho đoạn thẳng AB và C là điểm nằm trên đoạn AB sao cho $BC > AC$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB , vẽ nửa đường tròn đường kính AB và nửa đường tròn đường kính BC . Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính BC ($M \neq B, M \neq C$). Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$), đường thẳng MH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K . Hai đường thẳng AK và CM cắt nhau tại E .

- a) Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp và $BE^2 = BA \cdot BC$.
b) Từ C kẻ CN vuông góc với AB (N thuộc nửa đường tròn đường kính AB), gọi P là giao điểm của NK và CE . Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP .

Câu 5 (2.0 điểm)

- a) Cho một bảng gồm 2023 hàng, 2023 cột. Các hàng được đánh số từ 1 đến 2023 từ trên xuống dưới; các cột đánh số từ 1 đến 2023 từ trái qua phải. Viết các số tự nhiên liên tiếp 0, 1, 2, ... vào các ô của bảng theo đường chéo zíc-zắc (như hình vẽ bên). Hỏi số 2024 được viết ở hàng nào, cột nào? Vì sao?

Cột \ Hàng	1	2	3	4	...	2023
1	0	1	5	6	...	
2	2	4	7	13		
3	3	8	12			
4	9	11				
5	10					
...	...					
2023						

- b) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh:

$$\frac{bc}{2a + b + c} + \frac{ca}{2b + c + a} + \frac{ab}{2c + a + b} \leq \frac{a + b + c}{4}.$$

ĐÁP ÁN + THANG ĐIỂM

Câu	Đáp án	Thang điểm
Câu 1 (2.0 điểm)	Cho $P = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{\sqrt{a} - 2}{1 - \sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 1$. a) Rút gọn biểu thức P . b) Tìm a nguyên để biểu thức P nhận giá trị nguyên.	
	a) $P = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{\sqrt{a} - 2}{1 - \sqrt{a}}$ $= \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} - \frac{a - 1}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} - \frac{a - 4}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)}$ $= \frac{a + 3\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)}$ $= \frac{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)}$ $= \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}$	0.25 0.25 0.25 0.25
	b) $P = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{a} - 1}$. Ta có $P \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $\frac{2}{\sqrt{a} - 1} \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - 1 = -1 \\ \sqrt{a} - 1 = -2 \\ \sqrt{a} - 1 = 1 \\ \sqrt{a} - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (N)} \\ \text{VN} \\ a = 4 \text{ (N)} \\ a = 9 \text{ (N)}. \end{cases}$ Vậy $a = 0; a = 4; a = 9$ thì $P \in \mathbb{Z}$.	0.25 0.25 0.125x4
Câu 2a.	a) Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$, m là tham số. Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn $5x_1 + 2x_2 = 1$.	
(1.5 điểm)	Ta có $\Delta = m^2 + 560 > 0$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt. Theo định lí Vi-ét ta có:	0.5
		0.25

Câu	Đáp án	Thang điểm
	$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m}{5} & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{28}{5} & (2) \end{cases}$ Từ (1) và giả thiết ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m}{5} \\ 5x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{m+1}{3} \\ x_1 = \frac{2m+5}{15} \end{cases}$ Thay các giá trị x_1, x_2 vừa tìm được vào (2) ta được $\Leftrightarrow \left(\frac{2m+5}{15}\right)\left(-\frac{m+1}{3}\right) = -\frac{28}{5} \Leftrightarrow 2m^2 + 7m + 5 = 252$ $\Leftrightarrow 2m^2 + 7m - 247 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -13 \\ m = \frac{19}{2} \end{cases}$ Vậy các giá trị m cần tìm là $m = -13; m = \frac{19}{2}$.	0.25x2 0.25
Câu 2b.	Giải phương trình: $(x+4)(x-2) = 2\sqrt{x^2+2x-5}$.	
(1.0 điểm)	Điều kiện: $x^2 + 2x - 5 \geq 0$. Ta có $(x+4)(x-2) = 2\sqrt{x^2+2x-5}$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 2\sqrt{x^2+2x-5}$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 - 2\sqrt{x^2+2x-5} - 3 = 0.$ Đặt $t = \sqrt{x^2+2x-5}, t \geq 0$. Ta có phương trình $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3 \text{ (nhận)} \end{cases}$ Với $t = 3$ ta có $\sqrt{x^2+2x-5} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 9$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{15} \\ x = -1 + \sqrt{15} \end{cases}$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -1 \pm \sqrt{15}$.	0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 2c	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 7x - 5y + 6 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + 9x + 9 = \sqrt{2x+y+2} + \sqrt{x+4y+1} \end{cases}$.	
(1.5 điểm)	$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 7x - 5y + 6 = 0 & (1) \\ 4x^2 - y^2 + 9x + 9 = \sqrt{2x+y+2} + \sqrt{x+4y+1} & (2) \end{cases}$	

Câu	Đáp án	Thang điểm
	Điều kiện: $\begin{cases} 2x + y + 2 \geq 0 \\ x + 4y + 1 \geq 0. \end{cases}$ Xét phương trình (1): $2x^2 + y^2 - 3xy + 7x - 5y + 6 = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2 + (7 - 3y)x + y^2 - 5y + 6 = 0 \quad (*)$ Ta xem (*) là phương trình bậc hai theo biến x. Biệt thức $\Delta_x = (7 - 3y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (y^2 - 5y + 6) = (y - 1)^2.$ Phương trình (*) có hai nghiệm $\begin{cases} x = \frac{3y - 7 + y - 1}{4} = y - 2 \\ x = \frac{3y - 7 - (y - 1)}{4} = \frac{y - 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x + 3. \end{cases}$ +) Với $y = x + 2$, thay vào phương trình (2) ta được: $3x^2 + 5x + 5 = \sqrt{3x + 4} + \sqrt{5x + 9}$ $\Leftrightarrow 3x^2 + 3x + [(x + 2) - \sqrt{3x + 4}] + [(x + 3) - \sqrt{5x + 9}] = 0$ $\Leftrightarrow 3(x^2 + x) + \frac{x^2 + x}{x + 2 + \sqrt{3x + 4}} + \frac{x^2 + x}{x + 3 + \sqrt{5x + 9}} = 0$ $\Leftrightarrow x(x + 1) \left[3 + \frac{1}{x + 2 + \sqrt{3x + 4}} + \frac{1}{x + 3 + \sqrt{5x + 9}} \right] = 0 \quad (**)$ Với điều kiện $\begin{cases} 3x + 4 \geq 0 \\ 5x + 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$, ta có $3 + \frac{1}{x + 2 + \sqrt{3x + 4}} + \frac{1}{x + 3 + \sqrt{5x + 9}} > 0$ Do đó (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1. \end{cases}$ +) Với $y = 2x + 3$, thay vào phương trình (2) ta được $\sqrt{4x + 5} + \sqrt{9x + 13} + 3x = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{4x + 5} - 1) + (\sqrt{9x + 13} - 2) + 3x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{4(x + 1)}{\sqrt{4x + 5} + 1} + \frac{9(x + 1)}{\sqrt{9x + 13} + 2} + 3(x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (x + 1) \left[\frac{4}{\sqrt{4x + 5} + 1} + \frac{9}{\sqrt{9x + 13} + 2} + 3 \right] = 0 \quad (***)$ Với điều kiện $\begin{cases} 4x + 5 \geq 0 \\ 9x + 13 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{4}$, ta có $\frac{4}{\sqrt{4x + 5} + 1} + \frac{9}{\sqrt{9x + 13} + 2} + 3 > 0.$	0.125 0.25 0.25 0.25 0.25

Câu	Đáp án	Thang điểm
Câu 4 (2.0 điểm)	Cho đoạn thẳng AB và C là điểm nằm trên đoạn AB sao cho $BC > AC$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, vẽ nửa đường tròn đường kính AB và nửa đường tròn đường kính BC. Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính BC ($M \neq B, M \neq C$). Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$), đường thẳng MH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K. Hai đường thẳng AK và CM cắt nhau tại E. a) Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp và $BE^2 = BA \cdot BC$. b) Từ C kẻ CN vuông góc với AB (N thuộc nửa đường tròn đường kính AB), gọi P là giao điểm của NK và CE. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP.	
Câu 4a (1.0 điểm)	a) Ta có: $\widehat{BME} = \widehat{BKE} = 90^\circ$ nên tứ giác $BMKE$ nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{HKB} = \widehat{CEB}$ mà $\widehat{HKB} = \widehat{BAE}$ (cùng phụ với $\widehat{HKA}$) $\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CEB}$. $\triangle BEC$ đồng dạng với $\triangle BAE$ (vì $\widehat{ABE}$ chung và $\widehat{BAE} = \widehat{CEB}$) Do đó $\frac{BE}{AB} = \frac{BC}{BE} \Rightarrow BE^2 = BC \cdot AB$.	0.25 0.125 0.125 0.25 0.25
Câu 4b (1.0 điểm)	b) Xét tam giác vuông ABN có $CN \perp AB \Rightarrow BN^2 = BC \cdot AB$ mà $BE^2 = BC \cdot AB$ suy ra $BN = BE$ hay $\triangle BNE$ cân tại B, suy ra $\widehat{BNE} = \widehat{BEN}$. (1) Mặt khác, theo câu trên ta có $\widehat{CEB} = \widehat{BAE}$ và $\widehat{BAE} = \widehat{BNP}$ suy ra $\widehat{CEB} = \widehat{BNP}$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PNE} = \widehat{PEN}$ hay $\triangle PNE$ cân tại $P \Rightarrow NP = PE$. Vì $NP = PE$ và $BN = BE$ nên $BP \perp NE$. Suy ra BP là đường phân giác của các góc $\widehat{EBN}$ và $\widehat{EPN}$. Do đó tâm đường tròn nội tiếp các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP.	0.25 0.25 0.25 0.25

Câu	Đáp án	Thang điểm																																																								
Câu 5a	a) Cho một bảng gồm 2023 hàng, 2023 cột. Các hàng được đánh số từ 1 đến 2023 từ trên xuống dưới; các cột đánh số từ 1 đến 2023 từ trái qua phải. Viết các số tự nhiên liên tiếp 0, 1, 2,... vào các ô của bảng theo đường chéo zíc-zắc (như hình vẽ bên). Hỏi số 2024 được viết ở hàng nào, cột nào? Vì sao? <table><tr><th>Cột \ Hàng</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>...</th><th>2023</th></tr><tr><th>1</th><td>0</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>...</td><td></td></tr><tr><th>2</th><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>13</td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td>3</td><td>8</td><td>12</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td>9</td><td>11</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td>10</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>...</th><td>...</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2023</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	Cột \ Hàng	1	2	3	4	...	2023	1	0	1	5	6	...		2	2	4	7	13			3	3	8	12				4	9	11					5	10						...	...						2023							
Cột \ Hàng	1	2	3	4	...	2023																																																				
1	0	1	5	6	...																																																					
2	2	4	7	13																																																						
3	3	8	12																																																							
4	9	11																																																								
5	10																																																									
...	...																																																									
2023																																																										
Câu 5a (0.5 điểm)	Theo quy luật: Đánh số thứ tự các đường chéo như số thứ tự các hàng - Đường chéo thứ nhất viết 1 số (số 0) - Đường chéo thứ hai viết 2 số (từ 1 đến 2) ... - Đường chéo thứ n viết n số. Vậy với n đường chéo đầu tiên ta đã viết được $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ số (bắt đầu từ số 0) Lại có $2016 = \frac{63 \cdot 64}{2} < 2024 < \frac{64 \cdot 65}{2} = 2080$. Do đó với 63 đường chéo ta đã viết được 2016 số từ 0 đến 2015. Vậy các số tiếp theo 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024 sẽ được viết ở đường chéo thứ 64. Kể từ đường chéo thứ hai, tính từ trái qua phải, từ dưới lên trên, ta thấy đường chéo mang số lẻ thì tăng dần, đường chéo mang số chẵn thì giảm dần. Vậy số 2016 thì ở đầu cột 64, hàng 1. Vậy số 2024 được viết ở cột 56, hàng 9. <table><tr><td>0</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>14</td><td>15</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>13</td><td>16</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>8</td><td>12</td><td>17</td><td></td><td></td></tr><tr><td>9</td><td>11</td><td>18</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>10</td><td>19</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>20</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>21</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	0	1	5	6	14	15	2	4	7	13	16		3	8	12	17			9	11	18				10	19					20						21						0.125 0.125 0.125 0.125														
0	1	5	6	14	15																																																					
2	4	7	13	16																																																						
3	8	12	17																																																							
9	11	18																																																								
10	19																																																									
20																																																										
21																																																										
Câu 5b	Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh: $\frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ca}{2b+c+a} + \frac{ab}{2c+a+b} \leq \frac{a+b+c}{4}.$																																																									
(0.5 điểm)	Chứng minh được bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Ta có $\frac{1}{2a+b+c} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{(a+b)+(a+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$ $\Rightarrow \frac{bc}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} \right) \tag{1}$ Tương tự, ta có $\frac{ac}{2b+a+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ac}{b+c} + \frac{ac}{b+a} \right) \tag{2}$	0.125																																																								

Câu	Đáp án	Thang điểm
	$\frac{ab}{2c+a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \right). \quad (3)$ Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta được $VT \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ac}{b+c} + \frac{ac}{b+a} + \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \right)$ $= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{a+b} \right) + \left(\frac{bc}{a+c} + \frac{ab}{a+c} \right) + \left(\frac{ca}{b+c} + \frac{ab}{b+c} \right) \right] = \frac{a+b+c}{4}.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.	0.125
		0.125
		0.125