

## SỞ GD&amp;ĐT SƠN LA

## KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT

NĂM HỌC 2023 – 2024

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Môn thi: TOÁN (Bài thi Chuyên Toán, Tin)

Ngày thi: 07/06/2023

(Đề thi gồm 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

**Câu 1.** (1,0 điểm) Cho biểu thức  $Q = \frac{x\sqrt{y} + \sqrt{x} - y\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}}$ , với  $x \geq 0; y \geq 0$ .

a) Rút gọn biểu thức  $Q$ .b) Tính giá trị biểu thức  $Q$  khi  $x = 2024 + 2\sqrt{2023}; y = 2024 - 2\sqrt{2023}$ 

**Câu 2.** (1,0 điểm) Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = (2m - 3)x + 3m - 5$  ( $m$  là tham số)

a) Xác định giá trị của  $m$  để đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(-2; 3)$ .b) Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  tiếp xúc với parabol  $(P)$ .

**Câu 3.** (1,0 điểm)

Hai đội thanh niên tình nguyện cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 6 giờ. Nếu hai đội làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn thời gian hoàn thành công việc của đội thứ nhất là 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội hoàn thành công việc trong bao lâu?

**Câu 4.** (1,0 điểm)

Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_2^2 - x_1^2 + 4mx_1 = 16$

**Câu 5.** (1,0 điểm) Giải phương trình:  $x^2 - 4x + \sqrt{x^2 - 4x - 5} = 7$ .

**Câu 6.** (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = x + 2y \\ x^3 + 2x^2y = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

**Câu 7.** (3,5 điểm)

Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ , các đường cao  $BE$  và  $CF$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $S$  là giao điểm của đường thẳng  $BC$  và  $EF$ ;  $I$  là giao điểm của  $SA$  và đường tròn  $(O)$  (với  $I$  khác  $A$ ).

a) Chứng minh rằng tứ giác  $AFHE$  là tứ giác nội tiếp.b) Chứng minh  $SF \cdot SE = SI \cdot SA$  và  $HI \perp SA$ .c) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , kẻ đường kính  $AD$  của  $(O)$ . Chứng minh ba điểm  $H, M, D$  thẳng hàng và  $H$  là trực tâm tam giác  $ASM$ .d) Giả sử  $T$  là điểm nằm trên đoạn thẳng  $HC$  sao cho  $AT$  vuông góc với  $BT$ . Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $IST$  và tam giác  $ECT$  tiếp xúc với nhau.

**Câu 8.** (0,5 điểm) Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z = xyz$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz.$$

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Các bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

**HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT ĐỀ TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN NĂM 2023**  
**TRUNG TÂM LÊ VỮ**

**Câu 1. (1,0 điểm)** Cho biểu thức  $Q = \frac{x\sqrt{y} + \sqrt{x} - y\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}}$ , với  $x \geq 0; y \geq 0$ .

**a) Rút gọn biểu thức Q.**

$$Q = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{xy} + 1)}{1 + \sqrt{xy}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

**b) Tính giá trị biểu thức Q khi  $x = 2024 + 2\sqrt{2023}; y = 2024 - 2\sqrt{2023}$**

$$x = 2024 + 2\sqrt{2023} = 2023 + 2\sqrt{2023} + 1 = (\sqrt{2023} + 1)^2$$

$$y = 2024 - 2\sqrt{2023} = 2023 - 2\sqrt{2023} + 1 = (\sqrt{2023} - 1)^2$$

Khi  $x, y$  nhận các giá trị trên, ta có:

$$Q = \sqrt{(\sqrt{2023} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2023} - 1)^2} = \sqrt{2023} + 1 - \sqrt{2023} + 1 = 2$$

**Câu 2. (1,0 điểm)** Cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = (2m - 3)x + 3m - 5$  ( $m$  là tham số)

**a) Xác định giá trị của  $m$  để đường thẳng (d) đi qua điểm  $A(-2; 3)$ .**

(d):  $y = (2m - 3)x + 3m - 5$  đi qua  $A(-2; 3)$

$$\Leftrightarrow A \in (d) \Leftrightarrow (2m - 3) \cdot (-2) + 3m - 5 = 3 \Leftrightarrow -4m + 6 + 3m - 5 = 3 \Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

$$\Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

**b) Tìm  $m$  để đường thẳng (d) tiếp xúc với parabol (P).**

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = (2m - 3)x + 3m - 5 \Leftrightarrow x^2 - (2m - 3)x - 3m + 5 = 0 \quad (*)$$

(d) tiếp xúc với (P)  $\Leftrightarrow$  phương trình (\*) có nghiệm kép  $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow [-(2m - 3)]^2 - 4(-3m + 5) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 + 12m - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 = 11 \Leftrightarrow m^2 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

**Câu 3. (1,0 điểm)**

**Hai đội thanh niên tình nguyện cùng làm chung một công việc thì hoàn thành trong 6 giờ. Nếu hai đội làm riêng thì thời gian hoàn thành công việc của đội thứ hai ít hơn thời gian hoàn thành công việc của đội thứ nhất là 5 giờ. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội hoàn thành công việc trong bao lâu?**

Gọi  $x$  (giờ) là thời gian đội thứ nhất làm riêng hoàn thành công việc.

Gọi  $y$  (giờ) là thời gian đội thứ hai làm riêng hoàn thành công việc.

$$(x > y > 6)$$

+ Mỗi giờ đội thứ nhất làm được:  $\frac{1}{x}$  công việc

+ Mỗi giờ đội thứ hai làm được:  $\frac{1}{y}$  công việc

+ Hai đội cùng làm sau 6 giờ thì xong nên mỗi giờ hai đội cùng làm được  $\frac{1}{6}$  công việc. Ta có phương

$$\text{trình: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

+ Nếu hai đội làm riêng, thời gian hoàn thành của đội thứ hai ít hơn đội thứ nhất 5 giờ nên ta có phương trình:  $x - y = 5 \quad (2)$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6} \\ x - y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-5) + 6x = x(x-5) \\ y = x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 17x + 30 = 0 \\ y = x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \text{ (tm)} \\ x = 2 \text{ (loại)} \\ y = x-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \end{cases} \text{ (tm)}$$

Kết luận: Vậy nếu làm riêng đội thứ nhất hoàn thành công việc trong 15 giờ, đội thứ hai hoàn thành công việc trong 10 giờ.

**Câu 4. (1,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_2^2 - x_1^2 + 4mx_1 = 16$**

+ Phương trình có 2 nghiệm  $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - (m^2 - m + 1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow m-1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

+ Theo hệ thức Vi-ét: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - m + 1 \end{cases}$$

+ Ta có:  $x_2^2 - x_1^2 + 4mx_1 = 16 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 + 2(x_1 + x_2).x_1 = 16$

$$\Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 + 2x_1^2 + 2x_1 x_2 = 16 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 4 \\ 2m = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \text{ (nhân)} \\ m = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Kết luận: Vậy  $m = 2$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 5. (1,0 điểm) Giải phương trình:**  $x^2 - 4x + \sqrt{x^2 - 4x - 5} = 7.$

ĐK:  $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{cases}$

Phương trình đã cho  $x^2 - 4x - 5 + \sqrt{x^2 - 4x - 5} - 2 = 0$

Đặt  $t = \sqrt{x^2 - 4x - 5}, (t \geq 0)$ , ta được phương trình :

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhân)} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

+ Với  $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x - 5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{10} \\ x = 2 - \sqrt{10} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: Vậy phương trình có nghiệm:  $x = 2 \pm \sqrt{10}$ .

**Câu 6. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình:** 
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = x + 2y \\ x^3 + 2x^2y = x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

Ta có: 
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = x + 2y \quad (1) \\ x^3 + 2x^2y = x^2 + y^2 - 1 \quad (2) \end{cases}$$

(1)  $\Leftrightarrow x^2 + (y-1)x - 2y^2 - 2y = 0$

$$\Delta = y^2 - 2y + 1 + 8y^2 + 8y = 9y^2 + 6y + 1 = (3y + 1)^2$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-y+3y+1}{2} = y+1 \\ x = \frac{1-y-3y-1}{2} = -2y \end{cases}$$

+Với  $x = y+1$  thế vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2(x-1) &= x^2 + (x-1)^2 - 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x^3 - 2x^2 = x^2 + x^2 - 2x + 1 - 1 \\ \Leftrightarrow 3x^3 - 4x^2 + 2x &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ 3x^2 - 4x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{aligned}$$

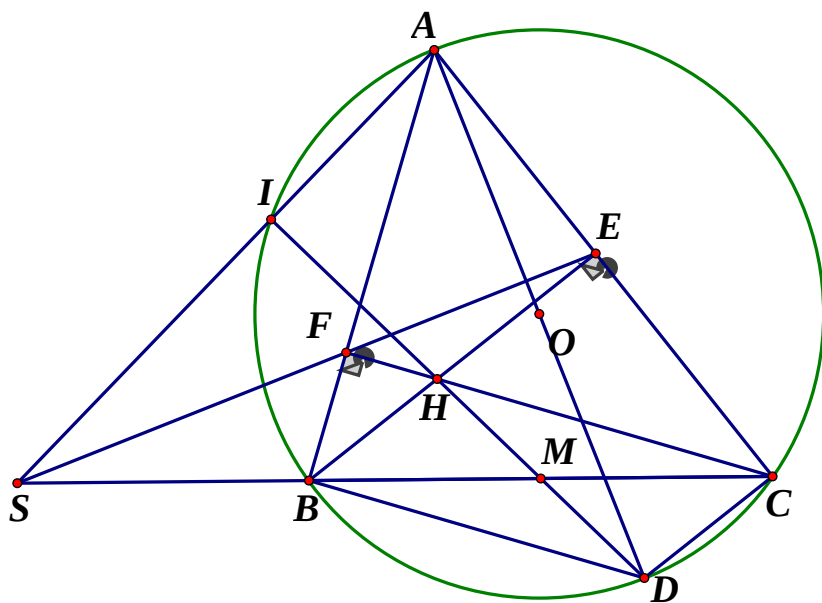
+ Với  $x = -2y$  thế vào (2) ta được:

$$-8y^3 + 2(-2y)^2 \cdot y = 4y^2 + y^2 - 1 \Leftrightarrow 5y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow x = -2 \left( \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

Kết luận: hệ phương trình có 3 nghiệm phân biệt:  $(x; y) = \left\{ (0; -1); \left( \frac{-2\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5} \right); \left( \frac{2\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \right\}$

**Câu 7. (3,5 điểm)**

Cho tam giác ABC nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi S là giao điểm của đường thẳng BC và EF; I là giao điểm của SA và đường tròn (O) (với I khác A).



a) Chứng minh rằng tứ giác AFHE là tứ giác nội tiếp.

Do  $BE \perp AC; CF \perp AB \Rightarrow \widehat{AEB} = \widehat{AFC} = 90^\circ$

Xét tứ giác  $AEHF$  có:  $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $AEHF$  nội tiếp đường tròn.

**b) Chứng minh  $SF \cdot SE = SI \cdot SA$  và  $HI \perp SA$ .**

Xét tứ giác  $BFEC$  có:  $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$

Mà 2 góc này cùng nhìn cạnh  $BC$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $BFEC$  nội tiếp đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FCB}$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung  $BF$ )

Xét tam giác  $SEB$  và tam giác  $SCF$  có:

$\widehat{ESC}$  là góc chung

$$\widehat{SEB} = \widehat{SCF}$$

$\Rightarrow \triangle SEB \sim \triangle SCF$  (g-g)

$$\Rightarrow \frac{SE}{SC} = \frac{SB}{SF} \Rightarrow SE \cdot SF = SB \cdot SC \quad (1)$$

Xét tam giác  $SAB$  và tam giác  $SCI$  có:

$\widehat{ASC}$  chung

$$\widehat{SAB} = \widehat{SCI} = \frac{1}{2} \text{ số đo cung } IB \text{ (góc nội tiếp)}$$

$\Rightarrow \triangle SAB \sim \triangle SCI$  (g-g)

$$\Rightarrow \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SI} \Rightarrow SA \cdot SI = SB \cdot SC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow SE \cdot SF = SA \cdot SI \Rightarrow \frac{SE}{SI} = \frac{SA}{SF}$$

$\Rightarrow \triangle SIF \sim \triangle SEA$  (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{SIF} = \widehat{SEA}$$

$\Rightarrow$  tứ giác  $AIFE$  nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

Mà 4 điểm  $A, E, H, F$  cũng cùng thuộc 1 đường tròn

$\Rightarrow$  5 điểm  $A, I, E, H, F$  cùng thuộc 1 đường tròn

$\Rightarrow AIHE$  nội tiếp đường tròn

$$\Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{AEH} = 90^0 \Rightarrow IH \perp SA$$

**(c) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ , kẻ đường kính  $AD$  của  $(O)$ . Chứng minh ba điểm  $H, M, D$  thẳng hàng và  $H$  là trực tâm tam giác  $ASM$ .**

Xét  $(O)$ :  $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^0$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BD \\ AC \perp AD \end{cases} \quad \text{mà} \quad \begin{cases} CH \perp AB \\ BH \perp AC \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CH \parallel BD \\ BH \parallel CD \end{cases}$$

$\Rightarrow$  tứ giác BHCD là hình bình hành

$\Rightarrow BC$  và  $HD$  cắt nhau.

**d) Giả sử  $T$  là điểm nằm trên đoạn thẳng  $HC$  sao cho  $AT$  vuông góc  $(a+b)c$  với  $BT$ . Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $IST$  và tam giác  $ECT$  tiếp xúc với nhau.**

**Câu 8. (0,5 điểm) Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z = xyz$ . Chứng minh rằng:**

$$\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq xyz.$$

Từ  $x + y + z = xyz \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = 1$

Lại có:  $\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2}} + = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}}$  (áp dụng  $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$ )

$$\Rightarrow \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \leq \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \leq 3 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$

Chứng minh:

$$3 \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq xyz$$

$$\Leftrightarrow 3(xy + yz + zx) \leq (xyz)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu “=” xảy ra khi  $x = y = z = \sqrt{3}$ .

----- Hết -----