

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (2,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$ và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 4$.

Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}}{a+5} + \frac{\sqrt{b}}{b+5} + \frac{\sqrt{c}}{c+5} = \frac{10}{\sqrt{(a+5)(b+5)(c+5)}}$.

2) Cho $f(x) = \frac{x^3}{1-3x+3x^2}$. Hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = f\left(\frac{1}{2022}\right) + f\left(\frac{2}{2022}\right) + \dots + f\left(\frac{2020}{2022}\right) + f\left(\frac{2021}{2022}\right)$$

Câu II. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $3x^2 + 6x - 3 = \sqrt{\frac{x+7}{3}}$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Câu III. (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức: $8x^2y^2 + x^2 + y^2 = 10xy$.

2) Cho $p; x; y$ là các số tự nhiên thỏa mãn $px^2 + x = (p+1)y^2 + y$.

Chứng minh rằng $px + py + 1$ là số chính phương.

Câu IV. (3,0 điểm)

1) Cho đường tròn tâm O , bán kính R . Điểm A nằm bên ngoài đường tròn tâm O . Qua A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC ; H là giao điểm của AO với BC . Lấy điểm E bất kì trên đường tròn (E khác B và C). Qua E vẽ tiếp tuyến với đường tròn tâm O , tiếp tuyến này cắt đường thẳng MN tại K .

a) Chứng minh rằng: $MN^2 = AH \cdot HO$;

b) Chứng minh rằng: $KA = KE$.

2) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC , BO với AC , CO với AB .

Chứng minh rằng: $AD + BE + CF \geq \frac{9R}{2}$.

Câu V. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{a^2 + b^2 + 2}{a + b - ab} + \frac{a^2 + c^2 + 2}{a + c - ac} + \frac{c^2 + b^2 + 2}{c + b - cb}$.