

Môn thi: Toán

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 14/9/2023

Đề thi gồm 01 trang, 05 bài

Câu 1. (5,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi x, y nguyên dương:

$$f(x, y) = f(y, x); \quad f(x, x) = x; \quad yf(x, y - x) = (y - x)f(x, y) \quad \text{nếu } y > x.$$

($\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ ký hiệu tập hợp gồm các cặp sắp thứ tự (x, y) với $x, y \in \mathbb{N}^*$.)

Câu 2. (5,0 điểm)

Chứng minh rằng tồn tại một tập hợp T gồm 2023 số tự nhiên thỏa mãn điều kiện: với A là tập con tùy ý của T , tổng các phần tử của A là lũy thừa của một số tự nhiên.

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho $P(x)$ là một đa thức bậc hai có 2 nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng không thể xảy ra đồng thời các trường hợp sau

- 1) Đa thức $P(P(x))$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.
- 2) Đa thức $P(P(P(x)))$ có đúng 7 nghiệm thực phân biệt.

Câu 4. (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) với số đo của $\widehat{BAC}$ khác 60° , H là trực tâm. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt tiếp tuyến qua C của (O) tại P và cắt đường thẳng AC tại D . Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt tiếp tuyến qua B của (O) tại Q và cắt đường thẳng AB tại E . Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BEQ, CDP . Chứng minh rằng ba đường thẳng PQ, IJ, OH đồng quy.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho 2023 tập hợp khác rỗng $A_1, A_2, \dots, A_{2023}$ thỏa mãn

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2023} \frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i| \cdot |A_j|} < 1.$$

Chứng minh rằng ta có thể chọn ra 2023 phần tử, mỗi phần tử thuộc một tập trong 2023 tập $A_1, A_2, \dots, A_{2023}$ sao cho các phần tử này đôi một phân biệt.

—————Hết—————

Chú ý: - Thí sinh không được dùng tài liệu.

- Giám thị không giải thích gì thêm.