

Câu 1 (4,0 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2024}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2024}{x - 1} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$, với $x > 0$ và $x \neq 1$.

Rút gọn và tính giá trị của biểu thức P tại $x = 2024 + 2\sqrt{2023}$.

b) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $xy + yz + zx = 4$ và $x^2 + y^2 + z^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$. Tính giá trị của biểu thức $T = x + y + z$.

Câu 2 (4,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 - 2mx - m - 4 = 0$ (với m là tham số). Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m . Tìm m để biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 + 2024$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy + x + y = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = 3 \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm). Cho a, b, c là các số nguyên, đôi một nguyên tố cùng nhau thỏa mãn $(a - c)(b - c) = c^2$. Chứng minh tích abc là số chính phương.

Câu 4 (4,0 điểm). Cho a, b là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a^4 + 1)(b^4 + 1) - 4ab$.

Câu 5 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC không cân ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi AD ($D \in BC$) là đường cao của tam giác ABC , AM là đường kính của đường tròn tâm O , K là hình chiếu của B lên AM .

a) Chứng minh $ABDK$ là tứ giác nội tiếp và DK vuông góc với AC .

b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BD, CM .

Chứng minh $\angle AEF = 90^\circ$.

----- Hết -----

Họ và tên học sinh: Số báo danh:

Chữ ký giám thị 1:

HƯỚNG DẪN CHẤM HỌC SINH GIỎI 9

NĂM HỌC 2024-2025

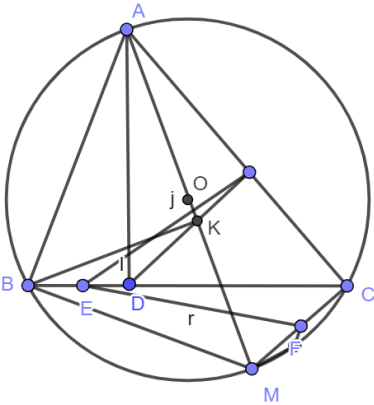
Ngày thi: 29/06/2024

Câu	Đáp án	Biểu điểm
Câu 1 4 điểm	Câu 1 (4 điểm) a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2024}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2024}{x - 1} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$, Với $x > 0$ và $x \neq 1$. Rút gọn và tính giá trị của biểu thức P tại $x = 2024 - 2\sqrt{2023}$. b) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $xy + yz + zx = 4$ và $x^2 + y^2 + z^2 = x - y^2 + y - z^2 + z - x^2$. Tính giá trị của biểu thức $T = x + y + z$.	
2 Điểm	a) $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2024}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2024}{x - 1} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$, Với $x > 0$ và $x \neq 1$. $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2024}{\sqrt{x} + 1^2} - \frac{\sqrt{x} - 2024}{\sqrt{x} - 1} \right) \left(\frac{2\sqrt{x} + x + 1}{2\sqrt{x}} \right)$ $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 2024}{\sqrt{x} + 1^2} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 2024}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1^2} \right) \left(\frac{\sqrt{x} + 1^2}{2\sqrt{x}} \right)$ $P = \frac{x + 2023\sqrt{x} - 2024 - x + 2023\sqrt{x} + 2024}{\sqrt{x} + 1^2 \sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1^2}{2\sqrt{x}}$ $P = \frac{2023}{\sqrt{x} + 1}$ Vậy với $x > 0$ và $x \neq 1$ thì $P = \frac{2023}{\sqrt{x} + 1}$ Với $x = 2024 - 2\sqrt{2023}$ (thỏa mãn) thay vào P ta có $P = \frac{2023}{\sqrt{2024 - 2\sqrt{2023}} + 1}$ $P = \frac{2023}{\sqrt{(\sqrt{2023} - 1)^2 + 1}}$ $P = \frac{2023}{\sqrt{2023} - 1 + 1}$ $P = \sqrt{2023}$ Vậy $x = 2024 - 2\sqrt{2023}$ thì $P = \sqrt{2023}$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
2 Điểm	b) Từ $x^2 + y^2 + z^2 = x - y^2 + y - z^2 + z - x^2$	

	$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + yz + zx$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 8$ Xét $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + yz + zx$ $\Rightarrow (x + y + z)^2 = 8 + 2.4 = 16$ $\Rightarrow x + y + z = \pm 4$ Vậy $T = x + y + z = 4$ (do x, y, z là các số thực không âm)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,5
Câu 2 4 điểm	Câu 2 (4,0 điểm) a) Cho phương trình $x^2 - 2mx - m - 4 = 0$ (với m là tham số). Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m. Tìm m để biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 + 2024$ đạt giá trị nhỏ nhất. b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy + x + y = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = 3 \end{cases}$	
2 Điểm	a) $x^2 - 2mx - m - 4 = 0(1)$ (với m là tham số). $\Delta' = m^2 + m + 4$ $\Delta' = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \forall m$ Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m Áp dụng định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -m - 4 \end{cases} *$ Xét $P = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 + 2024$ $P = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_2 + 2024$ Thay (*) vào ta có $P = 4m^2 + 8m + 32 + 2024$ $P = (2m + 2)^2 + 2052 \geq 2052$ $P_{\min} = 2052$ khi $m = -1$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
2 Điểm	b) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 - xy + x + y = 0(1) \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} = 3(2) \end{cases}$ Điều kiện $x \geq 1, y \geq 2$ Từ (1) ta có $x^2 - 2y^2 - xy + x + y = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - y^2 - y^2 - xy + x + y = 0$ $\Leftrightarrow x - y \quad x + y \quad -y \quad x + y \quad + \quad x + y = 0$ $\Leftrightarrow x + y \quad x - 2y + 1 = 0$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \text{ (kø t / m)} \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow x + 1 = 2y \text{ (3)}$ Kết hợp (2) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2y - 2 = x - 1 \\ \sqrt{2y - 2} + \sqrt{y - 2} = 3 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x + 1 \\ 2y - 2 + y - 2 + 2\sqrt{2y - 2} \sqrt{y - 2} = 9 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x + 1 \\ \sqrt{2y^2 - 6y + 4} = 13 - 3y \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x + 1 \\ 2y^2 - 6y + 4 = 169 - 78y + 9y^2 \text{ (} 2 \leq y \leq \frac{13}{3} \text{)} $	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x + 1 \\ 7y^2 - 84y + 165 = 0 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x + 1 \\ y_1 = \frac{42 + \sqrt{1155}}{7} \\ y_2 = \frac{42 - \sqrt{1155}}{7} \end{cases}$	0,25
	Ta thấy $y_2 = \frac{42 - \sqrt{1155}}{7}$ vì điều kiện $2 \leq y \leq \frac{13}{3}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x + 1 \\ y = \frac{42 + \sqrt{1155}}{7} \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{77 - 2\sqrt{1155}}{7} \\ y = \frac{42 + \sqrt{1155}}{7} \end{cases} \text{ (t / m)}$	0,25
Câu 3 3 điểm	Câu 3 (3,0 điểm). Cho a, b, c là các số nguyên, đôi một nguyên tố cùng nhau thỏa mãn $a - c \mid b - c = c^2$. Chứng minh tích abc là số chính phương.	

	Đặt $d = \text{ƯC}(a-c; b-c)$ $\Rightarrow \begin{cases} a-c : d \\ b-c : d \end{cases} \quad 1$ Ta lại có $c^2 = a-c \cdot b-c : d^2$ $\Rightarrow c^2 : d^2$ $\Rightarrow c : d \quad 2$ Từ (1) và (2) suy ra $a : d$ và $b : d$ Mà $(a;b) = 1$ nên $d = 1$ Ta lại có $a-c \cdot b-c = c^2$ $\Rightarrow a-c; b-c$ là hai số chính phương Đặt $a-c = m^2, b-c = n^2$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow c^2 = m^2 \cdot n^2 = (mn)^2$ $\Rightarrow c = mn$ Khi đó $a = m^2 + c = m^2 + mn$ $b = n^2 + c = n^2 + mn$ Ta có $abc = (m^2 + mn)(n^2 + mn) \cdot mn$ $abc = [mn(m+n)]^2$ Vậy abc là số chính phương	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 4 4 điểm	Câu 4 (4,0 điểm). Cho a, b là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a + b = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^4 + 1 \cdot b^4 + 1 - 4ab$	
	Ta có $P = a^4 + 1 \cdot b^4 + 1 - 4ab$ $P = a^4 b^4 + a^4 + b^4 + 1 - 4ab$ Vì $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2 b^2$ $= [a + b]^2 - 2ab - 2a^2 b^2$ $= 9 - 2ab - 2a^2 b^2$ $= 2a^2 b^2 - 36ab + 81$ Đặt $t = ab$ ta có $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow ab \leq \frac{9}{4}$ Khi đó $P = a^4 b^4 + 2a^2 b^2 - 36ab + 81 + 1 - 4ab$ $P = ab^4 + 2ab^2 - 40ab + 82$ $P = t^4 + 2t^2 - 40t + 82$	0,25 0,25 0,25 0,25

	Xét $P = t^4 + 2t - 40t + 82$ $P = t(t^3 + 2t - 40) + 82$ $P = t(t^3 - 27 + 2t - 6 - 7) + 82$ Vì $t^3 - 27 < 0, 2t - 6 < 0$ Suy ra $P = t(t^3 - 27 + 2t - 6) + 82 \leq 82$ Vậy P đạt giá trị lớn nhất là 82. “Dấu =” xảy ra khi $t = 0$ $\Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ Xét $P = t^4 + 2t - 40t + 82$ $P = (t^2 - 4)^2 + 10(t - 2)^2 + 26$ Vì $t^2 - 4^2 \geq 0; 10(t - 2)^2 \geq 0$ $P = (t^2 - 4)^2 + 10(t - 2)^2 + 26 \geq 26$ Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là 26. Dấu “=” xảy ra khi $t = 2$ hay $ab = 2$ mà $a + b = 3$ Nên $a = 2; b = 1$ hoặc $a = 1; b = 2$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 5 5 điểm	Câu 5 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC không cân ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi AD ($D \in BC$) là đường cao của tam giác ABC, AM là đường kính của đường tròn tâm O, K là hình chiếu của B lên AM. a) Chứng minh ABDK là tứ giác nội tiếp và DK vuông góc với AC. b) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng BD, CM. Chứng minh $\angle AEF = 90^\circ$.	
		
	a) Xét (O) có: $\angle AKB = \angle ADB = 90^\circ$ (gt) Mà hai đỉnh D và K kề nhau cùng nhìn cạnh AB $\Rightarrow$ Tứ giác ABDK nội tiếp Khi đó $\angle ABD = \angle DKM$ (1) Xét (O) có $\angle ABC = \angle AMC \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AC} \right)$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $\angle DKM = \angle AMC$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $KD \parallel CM$ (3)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

	Ta lại có $\widehat{ACM} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow MC \perp AC$ (4) Từ (3) và (4) ta có : $KD \perp AC$	0,25 0,25 0,25
	b) Xét tam giác ADB và tam giác ACM có: $\widehat{ADB} = \widehat{ACM} = 90^\circ$ $\widehat{ABD} = \widehat{AMC}$ (cmt) $\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle ACM$ (g - g) $\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BD}{CM}$; $\widehat{BAD} = \widehat{MAC}$ Lại có $\frac{BD}{CM} = \frac{2BE}{2MF}$ $\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BE}{MF}$ và $\widehat{BAE} = \widehat{MAF}$ $\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AE}{AK}$ Và $\widehat{BAM} = \widehat{BAE} + \widehat{EAM} = \widehat{MAF} + \widehat{EAM} = \widehat{EAK}$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,5

Chú ý: - Mọi cách giải khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

- Điểm không làm tròn.
- Hình vẽ sai không chấm phần chứng minh.