

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẮC KẠN**

(Đề thi gồm có 01 trang)

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS
CẤP TỈNH NĂM HỌC 2024-2025**

MÔN THI: TOÁN - LỚP 9

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (6,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-16}{x-6\sqrt{x}+8} - \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{4-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 4; x \neq 16$).

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để giá trị của A là một số nguyên.

2) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hàm số

$$y = \frac{m^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})m - \sqrt{15}}{m^2 - \sqrt{8}m + 3}x + 2024.$$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến.

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình $4\sqrt{x+3} = 1 + 4x - \frac{1}{x}$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + y + x = 7 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 72 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2(3x + y) = 29$.

2) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $5a$ là số chính phương và căn bậc ba của $2a$ là một số tự nhiên.

Câu 4. (6,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC đường cao AH , độ dài $BH = 9cm, HC = 16cm$, $\tan C = \frac{3}{4}$. Điểm O nằm trên đoạn AH sao cho $OH = 2cm$. Các điểm M, P, N lần lượt nằm trên các đoạn thẳng AB, OB, OC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{OP}{OB} = \frac{ON}{OC} = \frac{2}{5}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A và tính độ dài đoạn thẳng MN .

2) Cho tam giác ABC cân tại A ($BAC > 90^\circ$) nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . M là điểm nằm trên cạnh BC ($BM > CM$). Gọi D là giao điểm của AM và $(O; R)$ (D khác A), H là trung điểm BC . E là điểm chính giữa cung lớn BC . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD , J là giao điểm của BE với đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác BMD .

a) Chứng minh $MA.MD = MB.MC$ và bốn điểm B, I, E, J thẳng hàng.

b) Khi $2AB = R$ xác định vị trí điểm M để $2MA + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh : $2 > a^2 + b^2 + c^2 + 2abc$.

----- **HẾT** -----

Chú ý: Thí sinh không sử dụng tài liệu; cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: SBD:

Chữ ký CBCT 1:..... Chữ ký CBCT 2:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN - LỚP 9
(Bản hướng dẫn chấm gồm có 06 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

1. Hướng dẫn chấm đưa ra một khả năng, trên thực tế học sinh có thể có cách diễn đạt khác nhau cho cùng một nội dung tương tự. Vì vậy, khi nghiên cứu hướng dẫn chấm cần trao đổi thống nhất trong Hội đồng chấm thi.
2. Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không sai lệch so với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.
3. Điểm toàn bài là tổng điểm thành phần của từng câu hỏi trong đề thi, điểm lẻ đến 0,25.

II. ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1. (6,0 điểm)

Nội dung	Điểm
1) Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-16}{x-6\sqrt{x}+8} - \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{4-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 4; x \neq 16$). Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị nguyên của x để giá trị của A là một số nguyên.	
Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 16$. Ta có $A = \frac{2\sqrt{x}-16-(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}+4)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{x-6\sqrt{x}+8}$	1,0
$A = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-4)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$ Vậy với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 16$ thì $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$.	1,0
Ta có $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-4}$ Để A nguyên thì $5: (\sqrt{x}-4) \Leftrightarrow (\sqrt{x}-4) \in \{\pm 1; \pm 5\}$	1,0
Trường hợp 1: $\sqrt{x}-4 = -5 \Rightarrow \sqrt{x} = -1 (ktm)$; Trường hợp 2: $\sqrt{x}-4 = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 9 \Rightarrow x = 81 (tm)$; Trường hợp 3: $\sqrt{x}-4 = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 (tm)$; Trường hợp 4: $\sqrt{x}-4 = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25 (tm)$;	0,5
Vậy tập hợp các giá trị nguyên của x thỏa mãn bài toán là : $\{9; 25; 81\}$.	0,5
2) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hàm số	

$y = \frac{m^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})m - \sqrt{15}}{m^2 - \sqrt{8}m + 3}x + 2024.$ Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến.	
+ Để hàm số nghịch biến thì $a = \frac{m^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})m - \sqrt{15}}{m^2 - \sqrt{8}m + 3} < 0$ + Ta có $m^2 - \sqrt{8}m + 3 = (m - \sqrt{2})^2 + 1 > 0 \forall m$ + Nên $m^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{5})m + \sqrt{15} < 0$	1,0
+ Ta có $m^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{3})m - \sqrt{15} = (m - \sqrt{3})(m + \sqrt{5}) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m - \sqrt{3} < 0 \\ m + \sqrt{5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \sqrt{3} \\ m > -\sqrt{5} \end{cases} \text{ (tm)}$ $\begin{cases} m - \sqrt{3} > 0 \\ m + \sqrt{5} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{3} \\ m < -\sqrt{5} \end{cases} \text{ (ktm)}$ Vậy $-\sqrt{5} < m < \sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	1,0

Câu 2 (4,0 điểm).

Nội dung	Điểm
1) Giải phương trình $4\sqrt{x+3} = 1 + 4x - \frac{1}{x}$.	
Điều kiện: $x \geq -3; x \neq 0$ Ta có $4\sqrt{x+3} = 1 + 4x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow 4x\sqrt{x+3} = x + 4x^2 - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + x + 3 = 4$	0,5
Ta có phương trình $(2x - \sqrt{x+3})^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{x+3} = 2 \text{ (*)} \\ 2x - \sqrt{x+3} = -2 \text{ (**)} \end{cases}$	0,5
Từ (*) ta có $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2x - 2 \Rightarrow x + 3 = 4x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} \\ x = \frac{9 - \sqrt{65}}{8} \end{cases}$ Thay vào (*) và đối chiếu điều kiện ta thấy $x = \frac{9 + \sqrt{65}}{8}$ là nghiệm phương trình đã cho Từ (**) ta có $(**) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2x + 2 \Rightarrow x + 3 = 4x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow 4x^2 + 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7 + \sqrt{33}}{8} \\ x = \frac{-7 - \sqrt{33}}{8} \end{cases}$ Thay vào (**) và đối chiếu điều kiện ta thấy $x = \frac{-7 + \sqrt{33}}{8}$ là nghiệm phương trình đã cho Vậy tập nghiệm của phương trình là $T = \left\{ \frac{-7 + \sqrt{33}}{8}; \frac{9 + \sqrt{65}}{8} \right\}.$	1,0

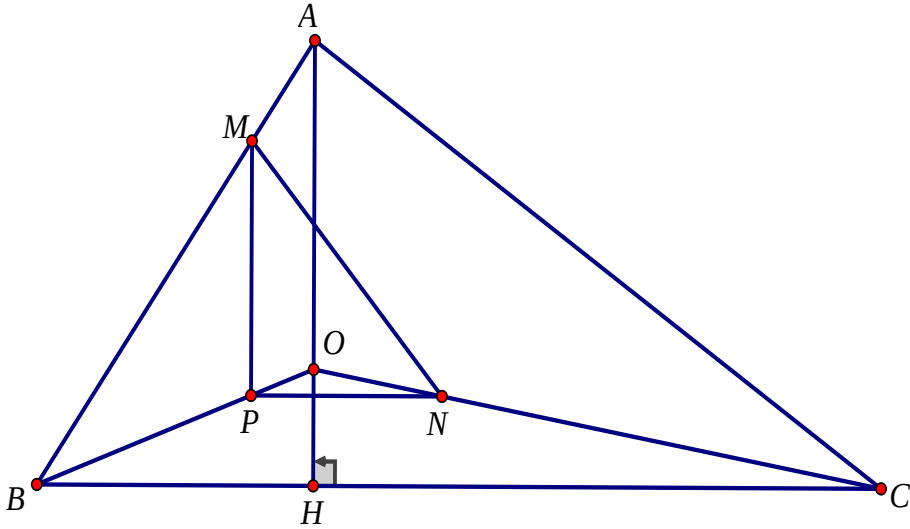
2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + y + x = 7 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 72 \end{cases}$	
Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} xy + y + x + 1 = 8 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = 8 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^3 (y+1)^3 = 512 \\ (x+1)^3 + (y+1)^3 = 72 \end{cases}$ Đặt $u = (x+1)^3, v = (y+1)^3$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} u + v = 72 \\ uv = 512 \end{cases}$	1,0
$\begin{cases} v = 72 - u \\ u^2 - 72u + 512 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 64 \\ v = 8 \\ u = 8 \\ v = 64 \end{cases}$	0,5
Với $\begin{cases} u = 64 \\ v = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^3 = 64 \\ (y+1)^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 4 \\ y+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ Với $\begin{cases} u = 8 \\ v = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)^3 = 8 \\ (y+1)^3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \\ y+1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x; y)$ là $(3;1), (1;3)$	0,5

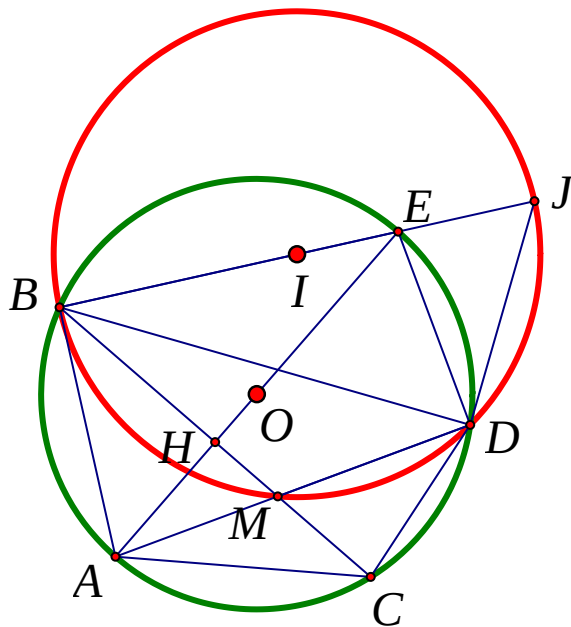
Câu 3 (3,0 điểm).

Nội dung					Điểm
1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 2(3x + y) = 29$.					
PT $\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 2y + 1) - 8 = 29 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - (y - 1)^2 = 37$ $(x - y + 4)(x + y + 2) = 37$					1,0
Ta có bảng					1,0
$x - y + 4$	1	37	-1	-37	
$x + y + 2$	37	1	-37	-1	
x	16	16	-22	-22	
y	19	-17	-17	19	
Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(16; 19), (16; -17), (-22; -17), (-22; 19)$.					
2) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $5a$ là số chính phương và căn bậc ba của $2a$ là một số tự nhiên.					
Trong bài toán này ta có $a \in \mathbb{Z}^+; 2a = b^3; 5a = c^2 \Rightarrow b, c \in \mathbb{Z}^+$ Ta có $2a = b^3$ (1) nên b^3 chia hết cho 2, mà 2 là số nguyên tố nên $b:2$. Đặt $b = 2d, d \in \mathbb{Z}^+$ thay vào (1) được $2a = 8d^3 \Leftrightarrow a = 4d^3$ (2) Từ $5a = c^2$ (3) nên c^2 chia hết cho 5, mà 5 là số nguyên tố nên $c:5$. Đặt $c = 5e, e \in \mathbb{Z}^+$ thay vào (3) ta được $5a = 25e^2 \Leftrightarrow a = 5e^2$ (4)					0,5
Từ (3) và (4) ta có $a = 4d^3 = 5e^2$ (*); $d, e \in \mathbb{Z}^+$. Do 4 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên d^3 chia hết cho 5. Vậy $d:5 \Rightarrow d = 5k; k \in \mathbb{Z}^+$. Thay vào (*) ta được $a = 5e^2 = 500k^3 \Leftrightarrow e^2 = 100k^3$. Để $a \in \mathbb{Z}^+$ nhỏ nhất thì $e, k \in \mathbb{Z}^+$ nhỏ nhất khi đó					0,5

$k=1 \Rightarrow e=10 \Rightarrow a=500$ Lúc này $2a=2.500=1000=10^3$; $5a=5.500=2500=50^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $a=500$ là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn bài toán.	
--	--

Câu 4. (6,0 điểm)

Nội dung	Điểm
1) Cho tam giác ABC đường cao AH, độ dài $BH=9cm, HC=16cm$, $tgC=\frac{3}{4}$. Điểm O nằm trên đoạn AH sao cho $OH=2cm$. Các điểm M, P, N lần lượt nằm trên các đoạn thẳng AB, OB, OC sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{OP}{OB}=\frac{ON}{OC}=\frac{2}{5}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A và tính độ dài đoạn thẳng MN.	
	
Xét $\triangle AHC$ vuông tại H $\Rightarrow tgC = \frac{AH}{HC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AH = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12cm \Rightarrow AO = AH - OH = 10cm$ Xét $\triangle AHB$ vuông tại $H \Rightarrow cotgB = \frac{BH}{AH} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = tgC \Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ$ Vậy $\angle BAC = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = 90^\circ$. Hay tam giác ABC vuông tại A	1,0
Xét tam giác $\triangle ABO$ có $\frac{AM}{AB} = \frac{OP}{OB} \Rightarrow MP \parallel OA$; $OA \perp BC \Rightarrow MP \perp BC$ (1) Xét tam giác $\triangle BOC$ có $\frac{OP}{OB} = \frac{ON}{OC} \Rightarrow PN \parallel BC$ (2) Từ (1) và (2) ta có $MP \perp PN \Rightarrow \triangle MPN$ vuông tại $P \Rightarrow MN^2 = MP^2 + PN^2$	0,5
Mặt khác $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5} = \frac{MP}{AO} \Rightarrow MP = \frac{3 \cdot 10}{5} = 6cm$ $\frac{ON}{OC} = \frac{PN}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow PN = \frac{2 \cdot (9+16)}{5} = 10cm$ Vậy $MN^2 = 6^2 + 10^2 = 136 \Rightarrow MN = \sqrt{136} cm$	0,5
2) Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle BAC > 90^\circ$) nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là điểm nằm trên cạnh BC ($BM > MC$). Gọi D là giao điểm của AM với $(O; R)$ (D khác A), H là trung điểm BC. E là điểm chính giữa cung lớn BC. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD, J là giao điểm của BE với đường tròn tâm I.	



a) Chứng minh $MA.MD = MB.MC$ và bốn điểm B, I, E, J thẳng hàng.

Xét $\triangle MAB \sim \triangle MCD$ (g.g) vì $\angle MAB = \angle MCD$; $\angle MBA = \angle MDC$ góc nội tiếp cùng chắn một cung. Suy ra $\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD} \Leftrightarrow MA.MD = MB.MC$

1,0

Xét đường tròn $(O; R)$ có $\angle EBD = \angle EAD$, đường tròn tâm I có $\angle BJD = \angle DMC$ (góc trong-góc ngoài)

Vì $\triangle ABC$ cân tại A , H là trung điểm BC , E là điểm chính giữa cung lớn BC nên $\angle EAD + \angle AMH = \angle EAD + \angle DMC = 90^\circ \Rightarrow \angle EBD + \angle BJD = 90^\circ$.

$\Rightarrow BD \perp JD$. Nên BJ là đường kính đường tròn tâm I . Vậy bốn điểm B, I, E, J thẳng hàng.

1,0

b) Khi $2AB = R$ xác định vị trí điểm M để $2MA + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\triangle HAM \sim \triangle DAE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{AM}{AE} \Leftrightarrow AM.AD = AH.AE$

Mà $AE = 2R$, xét $\triangle ABE$ vuông tại B có

$$AB^2 = AH.AE \Rightarrow AH = \frac{AB^2}{AE} = \frac{R}{8} \Rightarrow AM.AD = \frac{R^2}{4}$$

1,0

Mặt khác theo Bất đẳng thức Cô-si: $2AM + AD \geq 2\sqrt{2AM.AD} = 2\sqrt{2 \cdot \frac{R^2}{4}} = R\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $2AM = AD$. Vậy M là trung điểm của AD suy ra $OM \perp AD$. Nên M là giao điểm của đường tròn đường kính OA với BC .

1,0

Câu 5. (1,0 điểm)

Nội dung	Điểm
Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh:	

$2 > a^2 + b^2 + c^2 + 2abc.$	
Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên $a > 0; b > 0; c > 0$. $a + b + c = 2 \Rightarrow a < 1; b < 1; c < 1 \Rightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0$ $\Leftrightarrow 1 + ab + bc + ca - (a + b + c) - abc > 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca - abc > 1$ $\Leftrightarrow 2(ab + bc + ca - abc) > 2$	0,5
Mà $2(ab + ac + bc - abc) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) - 2abc$ $\Rightarrow 2^2 - (a^2 + b^2 + c^2) - 2abc > 2 \Leftrightarrow 2 > a^2 + b^2 + c^2 + 2abc.$	0,5

----- HẾT -----