

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{2x-2\sqrt{x(x-1)}}-1+2\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+1}{x\sqrt{x}-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 1$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
- b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho P nhận giá trị nguyên.

Bài 2.

- a) Giải phương trình $(\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x})\sqrt{2x^2+18}-5x+15=0$.
- b) Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $|a+b+c-2024|+\sqrt{2024(ab+bc+ca)-abc}=0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}}$.

Bài 3.

- a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - 2023^2$ chia hết cho 24.
- b) Một mảnh vườn hình vuông được chia thành lưới gồm 25×25 ô vuông nhỏ bằng nhau để trồng 25 loài hoa khác nhau. Trong mỗi ô vuông nhỏ được trồng đúng một loài hoa và các loài được trồng đối xứng nhau qua đường chéo chính của mảnh vườn (là đường nối từ đỉnh trên bên trái với đỉnh dưới bên phải). Biết không có hai ô vuông nhỏ nào trên cùng một cột trong cùng loài hoa.

Chứng minh rằng các loài hoa được trồng ở các ô vuông nhỏ có đường chéo chính đi qua là khác nhau.

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB), M là điểm tùy ý trên cạnh BC (M khác B, C, D). Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBF và đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $AFNE$ nội tiếp.
- b) Chứng minh rằng AM đi qua điểm N .
- c) Vẽ đường kính MP của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBF và đường kính MQ của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE . Chứng minh rằng các điểm P, H, N, Q thẳng hàng.

Bài 5. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.

=== Hết ===

HƯỚNG DẪN GIẢI THAM KHẢO

Bài 1. Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{2x-2\sqrt{x(x-1)}}-1+2\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+1}{x\sqrt{x}-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Ta có $2x-2\sqrt{x(x-1)}-1 = (\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^2$ và $x+2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1}+1)^2$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{2\sqrt{2x-2\sqrt{x(x-1)}}-1+2\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+1}{x\sqrt{x}-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}+1+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.$$

$$\text{Vậy, } P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \text{ (với } x > 1).$$

b) Ta có $2x+\sqrt{x} > 0 \Rightarrow 2(x+\sqrt{x}+1) > \sqrt{x}+2$, suy ra $0 < P < 2$.

Để P nhận giá trị nguyên thì $P=1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1$ suy ra $x=1$ (loại).

Vậy, không tồn tại giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 2.

a) Giải phương trình $(\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x})\sqrt{2x^2+18}-5x+15=0$.

b) Cho các số thực a, b, c khác 0 thỏa mãn $|a+b+c-2024| + \sqrt{2024(ab+bc+ca)-abc} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}}$.

Lời giải

a) Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$.

Ta có $5x-15=(\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x})(\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x})$.

$$(\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x})\sqrt{2x^2+18}-5x+15=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x})(\sqrt{2x^2+18}-\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x})=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=0 \text{ hoặc } \sqrt{2x^2+18}-\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=0.$$

Trường hợp 1: $\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=2\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow x+1=16-4x$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Trường hợp 2: $\sqrt{2x^2+18}-\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+18}=\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+18=x+1+4\sqrt{(x+1)(4-x)}+16-4x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3x+1-4\sqrt{(x+1)(4-x)}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x+1)-4\sqrt{(x+1)(4-x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \sqrt{x+1}(2x+1)=4\sqrt{4-x} \end{cases}$$

+) Xét phương trình $\sqrt{x+1}(2x+1)=4\sqrt{4-x}$, bình phương hai vế ta được

$$(x+1)(4x^2+4x+1)=16(4-x)$$

$$\Leftrightarrow 4x^3+8x^2+21x-63=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(2x^2+7x+21)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \text{ (vì phương trình } 2x^2+7x+21=0 \text{ vô nghiệm).}$$

Vậy, phương trình có tập nghiệm $S=\left\{3; -1; \frac{3}{2}\right\}$.

$$b) |a+b+c-2024| + \sqrt{2024(ab+bc+ca)-abc} = 0. \quad (1)$$

Ta có $|a+b+c-2024| + \sqrt{2024(ab+bc+ca)-abc} \geq 0$ với mọi a, b và c .

$$\text{Kết hợp với đề bài ta suy ra } \begin{cases} a+b+c-2024=0 \\ 2024(ab+bc+ca)-abc=0 \end{cases}$$

$$\text{Ta suy ra } (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$$

$$(a+b)(ab+bc+ca)+c(ab+bc+ca)-abc=0$$

$$(a+b)(ab+bc+ca)+c^2(a+b)=0$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0, \text{ suy ra } a=-b \vee b=-c \vee c=-a.$$

Trường hợp 1:

Nếu $a=-b \Rightarrow c=2024$, thay vào $P = \frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}}$ ta được

$$P = \frac{1}{2024^{2023}}.$$

Tương tự hai trường hợp còn lại ta tính được $P = \frac{1}{2024^{2023}}.$

Bài 3.

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p^2 - 2023^2$ chia hết cho 24.

b) Một mảnh vườn hình vuông được chia thành lưới gồm 25×25 ô vuông nhỏ bằng nhau để trồng 25 loài hoa khác nhau. Trong mỗi ô vuông nhỏ được trồng đúng một loài hoa và các loài được trồng đối xứng nhau qua đường chéo chính của mảnh vườn (là đường nối từ đỉnh trên bên trái với đỉnh dưới bên phải). Biết không có hai ô vuông nhỏ nào trên cùng một cột trong cùng loài hoa.

Chứng minh rằng các loài hoa được trồng ở các ô vuông nhỏ có đường chéo chính đi qua là khác nhau.

Lời giải

a) Ta có $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ là tích hai số tự nhiên chẵn liên tiếp nên $(p-1)p(p+1) \vdots 3.$

Ta lại có $(p-1)p(p+1) \vdots 3$, mà $p > 3$ nên $(p-1)(p+1) \vdots 3.$

Từ đó suy ra $(p-1)(p+1) \vdots 24$, do $(3;8)=1. \quad (1)$

Ta lại có $p^2 - 2023^2 = (p^2 - 1) - (2023^2 - 1)$

$$= (p-1)(p+1) - 2024 \cdot 2022, \text{ mà } 2024 \cdot 2022 \div 24. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $p^2 - 2023^2$ chia hết cho 24.

b) Vì các ô vuông nhỏ trên mỗi cột trồng các loài hoa khác nhau nên mỗi loài hoa sẽ được trồng trên 25 ô vuông của mảnh vườn.

Giả sử trên đường chéo chính có hai ô nào đó được trồng cùng một loài hoa, như vậy sẽ có một loài hoa nào đó (khác) không có mặt.

Lúc đó, loài hoa này sẽ được trồng ở 25 ô vuông trên phần còn lại của mảnh vườn (trừ các ô trên đường chéo chính). Điều này là không thể vì tính đối xứng (số ô vuông cùng loài phải chẵn).

Bài 4. Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB), M là điểm tùy ý trên cạnh BC (M khác B, C, D). Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBF và đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE .

a) Chứng minh rằng tứ giác $AFNE$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng AM đi qua điểm N .

c) Vẽ đường kính MP của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBF và đường kính MQ của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE . Chứng minh rằng các điểm P, H, N, Q thẳng hàng.

Lời giải

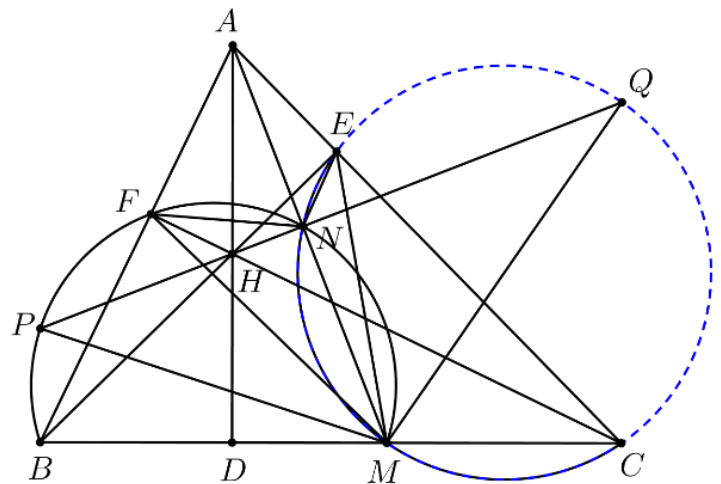
a) Chứng minh rằng tứ giác $AFNE$ nội tiếp.

Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác MBF ta có

$$\angle MNF = 180^\circ - \angle MBF.$$

Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác MCE ta có

$$\angle MNE = 180^\circ - \angle MCE.$$



Trong tam giác $ABC \Rightarrow \angle BAC + \angle MBF + \angle MCA = 180^\circ$ nên $\angle MBF + \angle MCA = 180^\circ - \angle BAC$

Mặt khác, ta có $\angle ENF = 360^\circ - (\angle MNF + \angle MNE)$

$$= \angle MBF + \angle MCE = \angle MBF + \angle MCA = 180^\circ - \angle BAC.$$

Do đó $\angle ENF + \angle BAC = 180^\circ$.

Xét tứ giác $AFNE$ có $ENF + EAF = 180^\circ$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau, suy ra tứ giác $AFNE$ nội tiếp. (1)

b) Ta chứng minh được tứ giác $AEHF$ nội tiếp nên bốn điểm A, E, H, F thuộc một đường tròn có đường kính AH .

Vì tứ giác $AFNE$ nội tiếp, nên bốn điểm A, F, N, E thuộc một đường tròn. (2)

Từ (1) và (2) suy ra năm điểm A, E, N, H, F cùng thuộc một đường tròn.

Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AFHN$, ta có $AHF = ANF$.

Ta có $AHF = ABD$ (cùng cộng $BAD = 90^\circ$) dẫn đến $ABD = ANF$.

+) Ta có $ANF + MNF = ABD + MNF = 180^\circ$ (vì tứ giác $BMNF$ nội tiếp).

Suy ra ba điểm A, M, N thẳng hàng. Hay đường thẳng AM đi qua điểm N .

c) Ta có A, E, N, H, F cùng thuộc một đường tròn. Suy ra tứ giác $AFHN$ nội tiếp, do đó

$$ANH + AFH = 180^\circ, \text{ mà } AFH = 90^\circ \Rightarrow ANH = 90^\circ \text{ suy ra } HN \perp AM. \quad (3)$$

Ta có $PNM = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $PN \perp AM$. (4)

Ta lại có $MNQ = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $QN \perp AM$. (5)

Từ (3), (4) và (5) suy ra các điểm P, H, N, Q thẳng hàng.

Bài 5. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.

Lời giải

Giả sử x là số nhỏ nhất trong ba số x, y, z nên $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

Ta đặt $P = xy + yz + zx - 2xyz = xy + xz + yz(1 - 2x) \geq 0$ với mọi x, y, z .

$$P = xy + yz + zx - 2xyz$$

$$= yz(1 - 2x) + x(y + z)$$

$$\leq \frac{(y+z)^2(1-2x)}{4} + x(1-x)$$

$$= \frac{(1-2x+x^2)(1-2x) + 4x - 4x^2}{4}$$

$$= \frac{1+x.x.(1-2x)}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{(x+x+1-2x)^3}{4.27} = \frac{7}{27}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy, $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.