

ĐỀ HSG Tỉnh Điện Biên 2021 2022

Câu 1. (5,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2} \right)$

1. Rút gọn biểu thức P .
2. So sánh giá trị của biểu thức P với 4.

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} = \frac{8x^3+4x}{2x+5}$
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m - 8 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 - 2x_2 = 1$.
2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = x + y + z + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+2}}.$$

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O) . Các đường cao AM, BN, CP của tam giác cắt nhau tại H .
 - a) Chứng minh: $MH.MA = MP.MN$
 - b) Gọi Q là điểm bất kì trên cung nhỏ BC (Q khác B, C), E, F lần lượt là điểm đối xứng với Q qua AB và AC . Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.
2. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, D và E là các điểm lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$, DE cắt BC tại K . Chứng minh rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{KE}{KD}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn: $x^2y^2 + (x-2)^2 + (2y-2)^2 - 2xy(x+2y-4) = 5$
2. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn điều kiện: $3c^2 = ab + c(a+b)$ và $a-b$ là số nguyên tố. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương.

---Hết---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (5,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2} \right)$

1. Rút gọn biểu thức P .
2. So sánh giá trị của biểu thức P với 4.

Lời giải

1. Rút gọn biểu thức P .

ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{x-x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{x-4-x+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. So sánh giá trị của biểu thức P với 4.

$$P-4 = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} - 4 \quad \text{Với } x \geq 0; x \neq 4$$

$$P-4 = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 - 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$P-4 = \frac{x+2\sqrt{x}+1-4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$P-4 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$\Rightarrow P \geq 4$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$.

Câu 2. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} = \frac{8x^3+4x}{2x+5}$
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$$

Lời giải

1. Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} = \frac{8x^3+4x}{2x+5}$

Điều kiện: $x \geq \frac{-3}{2}$.

$$\sqrt{2x+3} = \frac{8x^3+4x}{2x+5} \Leftrightarrow (2x+5)\sqrt{2x+3} = 8x^3+4x$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{2x+3} + 3\sqrt{2x+3} + 2\sqrt{2x+3} = 8x^3+4x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+3}(2x+3) + 2\sqrt{2x+3} = 8x^3+4x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3})^3 + 2\sqrt{2x+3} = (2x)^3 + 2(2x)$$

Đặt $a = \sqrt{2x+3}, b = 2x$ (ĐK: $a \geq 0, b \geq -3$)

Khi đó PT đã cho trở thành

$$a^3 + 2a = b^3 + 2b \Leftrightarrow (a-b) \left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 2 \right] = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ (Vì } \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 2 > 0 \text{)}$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{2x+3} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 2x+3 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{13}}{4} \text{ (tmĐK)}$$

$$\text{Vậy PT đã cho có nghiệm } x = \frac{1 + \sqrt{13}}{4}.$$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2xy^2 + (8y^2 + x^2)y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 8y^3 + x^2y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y)(4y^2 - xy + x^2) = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+2y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - xy + 4y^2 = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 8y^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

$$\text{TH2: } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + 4y^2 = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases} \quad (2)$$

$$x^2 - xy + 4y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + 4y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{15y^2}{4} > 0$$

HPT (2) vô nghiệm

Vậy hệ phương trình (1) có nghiệm (x;y) là (-2;1); (2;-1).

Câu 3.(4,0 điểm)

1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m - 8 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 - 2x_2 = 1$.
2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = x + y + z + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+2}}.$$

Lời giải

1. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m - 8 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 - 2x_2 = 1$.

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2m - 8) = 9$$

Do $9 > 0 \Rightarrow \Delta' > 0$ Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

$$x = \frac{-(m+1) - 3}{1} = -m - 4 \text{ hoặc } x = \frac{-(m+1) + 3}{1} = -m + 2$$

TH1: Nếu $x_1 = -m - 4$, $x_2 = -m + 2$

mà $x_1 - 2x_2 = 1$ nên $-m - 4 - 2(-m + 2) = 1$

$$\Leftrightarrow m = 9$$

TH2: Nếu $x_2 = -m - 4$, $x_1 = -m + 2$

mà $x_1 - 2x_2 = 1$ nên $-m + 2 - 2(-m - 4) = 1 \Leftrightarrow m = -9$.

Vậy $m \in \{-9; 9\}$.

2. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = x + y + z + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 2}}.$$

$$\begin{aligned} x + y + z + 2 = xyz &\Leftrightarrow 1 + y + xy + x + 1 + z + y + yz + 1 + x + z + xz \\ &= 1 + x + y + z + xy + xz + yz + xyz \\ &\Leftrightarrow (1+x)(1+y) + (1+y)(1+z) + (1+z)(1+x) \\ &= (1+x)(1+y)(1+z) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1 \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Bunyakovsky cho hai bộ số $(x; \sqrt{2})$ và $(1; \frac{1}{\sqrt{2}})$:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= \left(x \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \leq (x^2 + 2) \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3(x^2 + 2)}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} &\leq \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{y+1}; \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{z^2 + 2}} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{z+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 2}} \leq \frac{\sqrt{6}}{2} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right]$$

$$P \leq \frac{\sqrt{6}}{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = y = z = 2 \Rightarrow \min P = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O) . Các đường cao AM, BN, CP của tam giác cắt nhau tại H .

a) Chứng minh: $MH \cdot MA = MP \cdot MN$

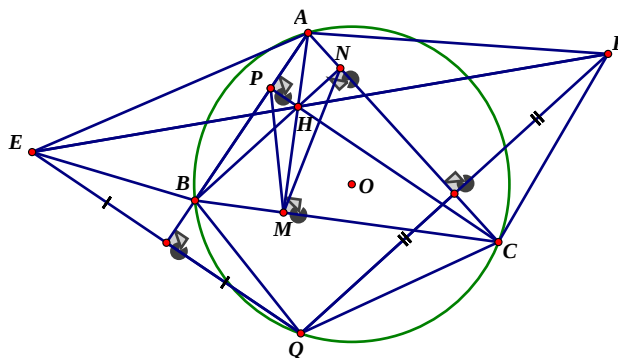
b) Gọi Q là điểm bất kì trên cung nhỏ BC (Q khác B, C), E, F lần lượt là điểm đối xứng với Q qua AB và AC . Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

2. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, D và E là các điểm lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho

$$BD = CE, DE \text{ cắt } BC \text{ tại } K. \text{ Chứng minh rằng } \frac{AB}{AC} = \frac{KE}{KD}.$$

Lời giải

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O) . Các đường cao AM, BN, CP của tam giác cắt nhau tại H .



- a) Chứng minh: $MH.MA = MP.MN$

Chứng minh được các tứ giác $PMCB, PNMB$ nội tiếp

suy ra $\widehat{HMP} = \widehat{PBN}, \widehat{PBN} = \widehat{HMN}$

$$\Rightarrow \widehat{HMP} = \widehat{HMN}$$

Tương tự tứ giác $ACMP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPH} = \widehat{MAN}$

Xét $\triangle MHP$ và $\triangle MAN$ có: $\Rightarrow \widehat{HMP} = \widehat{HMN}, \widehat{MPH} = \widehat{MAN}$

Suy ra $\triangle MHP$ đồng dạng với $\triangle MNA$

$$\text{Suy ra } \frac{MH}{MN} = \frac{MP}{MA} \Rightarrow MH.MA = MP.MN$$

- b) Gọi Q là điểm bất kì trên cung nhỏ BC (Q khác B, C), E, F lần lượt là điểm đối xứng với Q qua AB và AC . Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng.

Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{AQB}$ (Tính chất đối xứng). $\widehat{AQB} = \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{MHN} = 180^\circ - \widehat{AHB}$

$$\Rightarrow \widehat{AQB} + \widehat{AHB} = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác $AHBE$ nội tiếp.

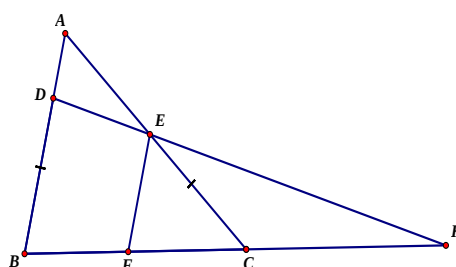
Chứng minh tương tự ta có tứ giác $AHCF$ nội tiếp.

Vì tứ giác $AHBE$ nội tiếp, tứ giác $AHCF$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AHE} = \widehat{ABE} = \widehat{ABQ} = 180^\circ - \widehat{ACQ} = 180^\circ - \widehat{ACF} = 180^\circ - \widehat{AHF}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHE} + \widehat{AHF} = 180^\circ. \text{ Suy ra 3 điểm } E; H; F \text{ thẳng hàng}$$

2. Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$, D và E là các điểm lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $BD = CE$, DE cắt BC tại K . Chứng minh rằng $\frac{AB}{AC} = \frac{KE}{KD}$.



Vẽ $EF \parallel AB$, $F \in BC$

Xét $\triangle KDB$ có $EF \parallel DB$, ta có $\frac{KE}{KD} = \frac{EF}{BD}$ (hệ quả của ĐL Talet) (1)

Xét $\triangle CAB$ có $EF \parallel AB$, ta có $\frac{CE}{AC} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{EF}{CE}$

Mà $BD = CE$ (gt) do đó $\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{BD}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{KE}{KD}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn: $x^2y^2 + (x-2)^2 + (2y-2)^2 - 2xy(x+2y-4) = 5$

2. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn điều kiện: $3c^2 = ab + c(a+b)$ và $a-b$ là số nguyên tố. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương.

Lời giải

1. Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ nguyên thỏa mãn: $x^2y^2 + (x-2)^2 + (2y-2)^2 - 2xy(x+2y-4) = 5$

$$x^2y^2 + (x-2)^2 + (2y-2)^2 - 2xy(x+2y-4) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 - 4x + 4 + 4y^2 - 8y + 4 - 2x^2y - 4xy^2 + 8xy = 5$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 4x + 4) - 2y(x^2 - 4x + 4) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4)(y^2 + 1 - 2y) = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2(y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1) = 1 \\ (x-2)(y-1) = -1 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x-2=1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x-2=-1 \\ y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} x-2=1 \\ y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} x-2=-1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy cặp số $(x; y)$ nguyên là: $(3; 2); (1; 0); (3; 0); (1; 2)$.

2. Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn điều kiện: $3c^2 = ab + c(a+b)$ và $a-b$ là số nguyên tố. Chứng minh $8c+1$ là số chính phương.

$$\text{Từ } 3c^2 = ab + c(a+b) \Rightarrow 4c^2 = c^2 + ab + ac + bc = (a+c)(b+c)$$

$$\text{Đặt } (a+c; b+c) = d \Rightarrow \begin{cases} a+c : d \\ b+c : d \end{cases} \Rightarrow a-b : d$$

Do $a-b$ là số nguyên tố nên $d = a-b$ hoặc $d = 1$

+) Nếu $d = 1$ thì $a+c$ và $b+c$ là hai số nguyên tố cùng nhau mà $4c^2 = (a+c)(b+c)$ là số chính phương

$\Rightarrow a+c$ và $b+c$ là hai số chính phương

$$\text{Đặt } a+c = m^2; b+c = n^2 \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$\Rightarrow m^2 - n^2 = a-b$ là số nguyên tố $\Rightarrow m^2 - n^2$ là số nguyên tố hay $(m-n)(m+n)$ là số nguyên tố $\Rightarrow m-n = 1 \Rightarrow m = n+1$

$$\Rightarrow 4c^2 = (a+c)(b+c) = m^2 n^2 \Rightarrow 2c = mn$$

$$\Rightarrow 8c+1 = 4mn+1 = 4n(n+1)+1 = (2n+1)^2 \text{ là số chính phương}$$

+) Nếu $a-b = d$ thì $a+c = (a-b)x$, $b+c = (a-b)y$

$$a-b = (a-b)x - (a-b)y = (a-b)(x-y)$$

$$\Rightarrow x-y = 1 \Rightarrow x = y+1$$

$$\Rightarrow 4c^2 = (a+c)(b+c) = (a-b)^2 xy = (a-b)^2 y(y+1)$$

$\Rightarrow y(y+1)$ là số chính phương ; y và $y+1$ là hai số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow y(y+1) = 0$

$$\Rightarrow c = 0 \Rightarrow 8c+1 = 1 \text{ là số chính phương}$$

---Hết---