

Bài 5 (5,0 điểm). Cho n là một số nguyên lớn hơn 4 và p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x + 1)^n - px^2 - px + p^2$ không thể phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Bài 6 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y) + y^{2023}) = yf(x) + (f(y))^{2023}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 7 (5,0 điểm). Bộ ba số nguyên dương (a, b, p) , với p là số nguyên tố, được gọi là “tốt” nếu:

$$(a + b)(a^p + b^p) = 2^a + 2^b.$$

- Chứng minh rằng không có bộ số “tốt” nào trong trường hợp $a \neq b$ và p lẻ.
- Tìm tất cả các bộ số “tốt”.

Bài 8 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , đường kính AS . Đường tròn (K) tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại D . Tiếp tuyến tại S của đường tròn (O) cắt đường trung trực của đoạn thẳng AD tại T . Gọi P là điểm đối xứng của D qua đường thẳng TK .

- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tiếp xúc với đường tròn (K) .
- Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , Δ là đường thẳng vuông góc với AD tại D , Δ' là tiếp tuyến song song với BC của đường tròn (K) (Δ' nằm cùng phía với D so với BC). Trong trường hợp Δ cắt Δ' , gọi M là giao điểm của hai đường thẳng đó. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BC, OI đồng quy.

—————HẾT—————

- Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.