

Bài 1. Cho biểu thức $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}-x-1}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}$

Bài 2. a) Giải phương trình $21(x^3 + x^2 + x) = 4\sqrt{7}(x^2 + 1)\sqrt{x^4 + 1}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(y-5) - y^2(x+2) = 11(x-y) - 7xy \\ x^2 - 2y + 8 = y\sqrt{2x+4} + (y-2)\sqrt{8-2y} \end{cases}$$

Bài 3. a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = 12x^2$ và đường thẳng (d): $y = 6mx - m^2 + 4 - \frac{12}{m^2}$ với m là tham số khác 0. Tìm các giá trị của m để (d) và (P) có các điểm chung lần lượt có hoành độ $x_1; x_2$ sao cho $x_1^3 + x_2^3$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $2^y = x^3 + x^2 + x + 1$.

Bài 4. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. Đường thẳng AI cắt BC tại M và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh rằng $KC^2 = KM.KA$

b) Gọi P là điểm chính giữa của cung $\widehat{BC}$ chứa A trên đường tròn (O), D là hình chiếu vuông góc của I trên cạnh BC, G là giao điểm của AD với đường tròn (O) (G khác A), H là giao điểm của PG và ID. Chứng minh rằng tứ giác IBHC nội tiếp.

c) Giả sử N, Q lần lượt là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác IBHC với các đường thẳng PH, AI. Chứng minh rằng NQ đi qua trung điểm của BC.

d) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác IBHC với các đường thẳng AC, AB và J, L lần lượt là giao điểm của đường tròn (O) với các đường thẳng BI, CI. Chứng minh rằng giao điểm của EL và JF nằm trên đường tròn ngoại tiếp tứ giác IBHC.

Bài 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2ab+b^2} + \frac{1}{2bc+c^2} + \frac{1}{2ca+a^2} \geq 1$