

ĐỀ THI TUYỂN SINH 10 THPT

CHUYÊN KHTN HÀ NỘI

MÔN TOÁN CHUYÊN

Câu I. (4 điểm)

- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)(x+1)=4 \\ (y^2+xy+x+y+5)(x^3+y^3+12y+13)=243 \end{cases}$$
- 2) Giải phương trình: $(x-12)^7 + (2x-12)^7 + (24-3x)^7 = 0$

Câu II. (2 điểm)

- 1) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho cả ba số $4a^2 + 5b; 4b^2 + 5c; 4c^2 + 5a$ đều là bình phương của số nguyên dương
- 2) Từ một bộ 4 số thực (a, b, c, d) ta xây dựng bộ số mới $(a+b, b+c, c+d, d+a)$ và liên tiếp xây dựng các bộ số mới theo quy tắc trên. Chứng minh rằng nếu ở hai thời điểm khác nhau, ta thu được cùng một bộ số (có thể khác thứ tự) thì bộ số ban đầu phải có dạng $(a; -a; a; -a)$

Câu III. (3 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A với $\widehat{BAC} < 90^\circ$. Gọi P là giao điểm của BE với trung trực của BC . Gọi K là hình chiếu vuông góc của P lên AB . Gọi Q là hình chiếu vuông góc của E lên AP . Gọi giao điểm của EQ và PK là F

- 1) Chứng minh rằng 4 điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn
- 2) Gọi giao điểm của KQ và PE là L . Chứng minh rằng $LA \perp LE$
- 3) Gọi giao điểm của FL và AB là S . Gọi giao điểm của KE và AL là T . Lấy R là điểm đối xứng với A qua L . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AST và đường tròn ngoại tiếp tam giác BPR tiếp xúc với nhau

Câu IV. (1 điểm)

Với a, b, c là những số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1\right)^2 + 1 \geq \frac{4}{abc} + 3\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)$$

ĐÁP ÁN

Câu I.

1) Thay $(x+y)(x+1)=4$ vào phương trình (2) ta có:

$$\begin{aligned}y^2 + xy + y + 5 &= (x+y)(y+1) + (x+y)(x+1) + 1 \\&= (x+y)(x+y+2) + 1 = (x+y+1)^2 \\&+ x^3 + y^3 + 12y + 13 = x^3 + y^3 + 3(x+y)(x+1)(y+1) + 1 \\&= (x+y+1)^3 \Rightarrow (x+y+1)^5 = 243 \\&\Rightarrow x+y+1=3 \Rightarrow x+y=2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x=y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \text{ Đặt } x-12=a \text{ và } 2x-12=b &\Rightarrow a^7 + b^7 - (a+b)^7 = 0 \\&\Rightarrow (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + b^4a^2 - ab^5 + b^6) - (a+b)(a+b)^6 = 0 \\&\Leftrightarrow (a+b) \left(\begin{aligned} &a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + b^4a^2 - ab^5 + b^6 - a^6 \\ &-6a^5b - 15a^4b^2 - 20a^3b^3 - 15b^4a^2 - 6ab^5 - b^6 \end{aligned} \right) = 0 \\&\Leftrightarrow (a+b)7ab(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2b^3a + b^4) = 0 \\&\Leftrightarrow (a+b)7ab \left[(a^2 + ab)^2 + a^2b^2 + (b^2 + ab)^2 \right] = 0 \\&\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=6 \\ x=8 \end{cases}\end{aligned}$$

Câu II.

1) Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max \{a; b; c\}$. Ta có:

$$(2a)^2 < 4a^2 + 5b < (2a+2)^2 \Rightarrow 4a^2 + 5b = (2a+1)^2 \Rightarrow 5b = 4a+1$$

Chúng minh tương tự : $5c \geq 4b+1 = \frac{16a+9}{5}$ hay $a \leq \frac{25c-9}{16} < 2c$. Từ đó:

$$(2c)^2 < 4c^2 + 5a < (2c+3)^2$$

Nên ta phải có $4c^2 + 5a \in \{(2c+1)^2, (2c+2)^2\}$ Từ đây, xét hai trường hợp:

*) Nếu $4c^2 + 5a = (2c + 1)^2$ thì $5a = 4c + 1$ và do $a \geq c$ nên trong trường hợp này thì $a = b = c = 1$

*) Nếu $4c^2 + 5a = (2c + 2)^2$ thì $5a = 8c + 4$. Khi đó,

$$16a = \frac{128}{5}c + \frac{64}{5} > 25c \geq 16a + 9 \text{ (vô lý)}$$

Vậy $a = b = c$

2) Giả sử ở thời điểm thứ n ta thu được bộ số $(a_n; b_n, c_n, d_n)$ và nếu đặt

$$S_n = a_n + b_n + c_n + d_n \text{ thì } S_n = 2S_{n-1} \Rightarrow S_n = 2^n S_0 \text{ với } S_0 = a + b + c + d$$

Vì tồn tại hai thời điểm ta thu được cùng một số nên $S_0 = 0$ kéo theo $S_n = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Nếu đặt $P_n = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2$ thì

$$P_{n+1} = 2P_n + 2(a_n + c_n)(b_n + d_n) = 2P_n + 2S_{n-1}^2 = 2P_n \text{ (} \forall n \geq 1 \text{)}$$

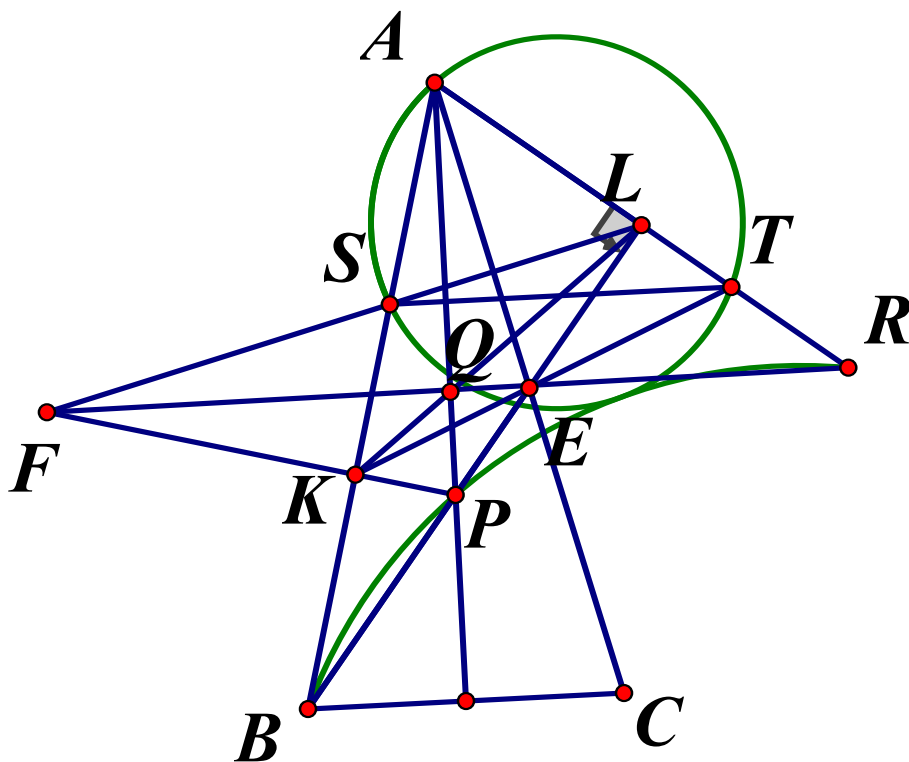
$$\Rightarrow P_n = 2^{n-1} P_1 \text{ (} \forall n \geq 2 \text{)}$$

Cũng vì tồn tại hai thời điểm thu được hai bộ số giống nhau nên $P_1 = 0$

$$\Rightarrow a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0.$$

Điều đó có nghĩa toàn bộ số ban đầu phải là $(a, -a, a, -a)$

Câu III.



- 1) Ta có $\angle PAE = \angle PAK = \angle EFK \Rightarrow AEPF$ là tứ giác nội tiếp
- 2) Điểm A nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF nên theo định lý về đường thẳng Simson, hình chiếu vuông góc của A trên 3 cạnh của tam giác PEF thẳng hàng. Do K, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên PF, PE, KQ cắt PE tại L nên $AL \perp PE$
- 3) Ta phát biểu một bổ đề như sau
Bổ đề Cho tam giác ABC . Đường cao AD , P là điểm bất kỳ trên AD . BP, CP cắt AC, AB lần lượt tại E và F. Khi đó DA là phân giác $\angle EDF$

Chứng minh: Qua A kẻ đường song song với BC , cắt DE, DF tại X và Y

Ta có: $\frac{AX}{DC} = \frac{AE}{EC}; \frac{AY}{DB} = \frac{AF}{FB}$ mà $\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$ (định lý Ceva) nên $AX = AY$

Lại có $AD \perp XY \Rightarrow DA$ là phân giác $\angle EDF$

Trở lại bài toán : ta có:

$\angle KLE = \angle QLE = \angle QAK = \angle EFK \Rightarrow ELFK$ là tứ giác nội tiếp

Gọi T' là giao của hai đường thẳng qua S song song với BC , với AL

Ta có: $\angle AT'S = \angle APL = \angle AKL$ nên tứ giác $SLT'K$ nội tiếp

Suy ra $\angle LKT' = \angle LST' = \angle LFE = \angle LKE$

Suy ra K, E, T' thẳng hàng. Từ đó $T' \equiv T$

Gọi Y là hình chiếu vuông góc của P trên $AC.BY$ cắt (AKP) tại X , cắt AL tại T''

Ta có $PY = PK \Rightarrow LP$ là phân giác của $\angle KLY$

Mà $BL \perp AT''$ nên theo **bổ đề** trên, K, E, T'' thẳng hàng nên $T'' \equiv T$

Ta có $\angle AXT = \angle APY = \angle APK = \angle ABC = \angle AST$ nên $X \in (AST)$

$\angle PXB = \angle PAY = \angle PAB = \angle PRB \Rightarrow X \in (BPR)$

Do $\angle AXP = 90^\circ = \angle ATX + \angle PBX$ nên kẻ tiếp tuyến Xt của (AST) thì Xt cũng là tiếp tuyến của (BPR) . Vậy (AST) tiếp xúc với (BPR) tại X .

Câu IV.

Biểu thức cần chứng minh tương đương với:

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + 4 \geq \frac{4}{abc} + \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} + 6\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + 4 \geq \frac{4}{abc} + \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 + 4 \geq \frac{31}{abc}$$

Quy đồng và rút gọn ta đưa về chứng minh:

$$3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4a^2b^2c^2 \geq 13abc$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c)) \geq 4abc(1-abc)$$

$$\Leftrightarrow 81(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c)) \geq 4abc[(a+b+c)^3 - 27abc]$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$, ta có các phân tích sau

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c) = c^2(a-b) + ab(a-c)(b-c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 - 27abc = (a+b+7c)(a-b)^2 + (4a+4b+c)(a-c)(b-c)$$

Khi đó, BT cần chứng minh tương đương với:

$$81c^2(a-b)^2 + 81ab(a-c)(b-c) \geq 4abc(a+b+7c)(a-b)^2 + 4abc(4a+4b+c)(a-c)(b-c)$$

Với $a \leq b \leq c$, kết hợp $a+b+c=3$ ta dễ có 2 đánh giá sau:

$$81c^2 \geq 4abc(a+b+7c) \quad ; 81ab \geq 4abc(4a+4b+c)$$

Kết hợp $(a-c)(b-c) \geq 0$ (đpcm)