

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

PHÚ THO

TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn: Toán

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)

Thời gian làm bài: **150 phút**, không kể thời gian giao đềĐề thi có 01 trang**Câu 1 (2,0 điểm).**

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m - 8 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 6 = \sqrt{x_2}$.

b) Cho $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}$ với $x \neq 0, x \neq -1$. Tính $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023)$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 - 8c^3 + 28d^3 = 0$. Chứng minh rằng $(a + b + c + d)^2$ chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc 2024 thỏa mãn điều kiện $P(x^2 - 2)$ chia hết cho $P(x)$.

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x + \sqrt{x^2 - x + 1}) = 1 - y + \sqrt{y^2 + 3} \\ y^2 - 2(x - 2) = 3\sqrt{(y+1)(y^2 + 2x)} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

b) Bạn An viết lên trên bảng 11 số nguyên dương (không nhất thiết phân biệt) có tổng bằng 30. Chứng minh rằng bạn An có thể xóa đi một số số sao cho các số còn lại trên bảng có tổng bằng 10.

Câu 4 (3,0 điểm). Trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ lấy điểm N sao cho $AN = R$ và M là một điểm thay đổi trên cung nhỏ BN (M khác B và N). Gọi I là giao điểm của AM và BN , H là hình chiếu của I trên AB , IH cắt AN tại C , K là điểm đối xứng với N qua AB .

a) Chứng minh $CM \cdot CB = CI \cdot CH$ và ba điểm K, H, M thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm thứ hai của NH và (O) . Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPK thuộc đường thẳng cố định khi M thay đổi.

c) Xác định vị trí của điểm M để tổng $MB + MN$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (1,0 điểm). Xét các số thực dương a, b, c ; Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$F = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 9bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 9ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 9ab}}.$$

*****Hết*****

TRƯỜNG THCS LÂM THAO

ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN
TỈNH PHÚ THỌ

Năm học: 2023 - 2024

Câu 1.

a) Phương trình (1) có $\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (m^2 - 2m - 8) = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 2m + 8 = 9 > 0$ với mọi m
 $\Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{9} = 3$ suy ra phương trình (1) có hai nghiệm: $m+2$ và $m-4$.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $x_1 = m+2; x_2 = m-4$ để $x_1 + 6 = \sqrt{x_2}$ thì

$$m+2+6 = \sqrt{m-4} \quad (dk : m \geq 4)$$

$$\Rightarrow m+8 = \sqrt{m-4}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 16m + 64 = m - 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 15m + 68 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có $\Delta_m = 15^2 - 4 \cdot 1 \cdot 68 = -47 < 0$ suy ra phương trình (2) vô nghiệm

Trường hợp 2: $x_1 = m-4; x_2 = m+2$ để $x_1 + 6 = \sqrt{x_2}$ thì

$$m-4+6 = \sqrt{m+2} \quad (dk : m \geq -2)$$

$$\Leftrightarrow m+2 = \sqrt{m+2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+2}(\sqrt{m+2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2=0 \\ m+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=-1 \end{cases} \quad (tm)$$

Vậy $m \in \{-2; -1\}$ b) Với $a \neq 0; a \neq 1$ ta có:

$$\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{2}{a} - \frac{2}{a+1} - \frac{2}{a(a+1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{2(a+1-a-1)}{a(a+1)} = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} \quad (*)$$

Áp dụng (*) ta có:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2023)$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(1+1)^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(2+1)^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{(3+1)^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{(2023+1)^2}}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2024^2}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}\right)$$

$$= 2024 - \frac{1}{2024} = \frac{4096575}{2024}$$

Câu 2.

a) Ta có: $a^3 + b^3 - 8c^3 + 28d^3 = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 : 3$

$$\Rightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + (c+d)^3 - 3cd(c+d) : 3$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 + (c+d)^3 : 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)^3 - 3(a+b)(c+d)(a+b+c+d) : 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)^3 : 3$$

$$\Rightarrow a+b+c+d : 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c+d)^2 : 9 \quad (\text{đpcm})$$

b) Xét đa thức $P(x) = a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}$, với $a \in \mathbb{R}$, đa thức $P(x)$ có bậc là 2024

Ta có:

$$P(x^2 - 2) = a(x^2 - 1)^{1012}(x^2 - 4)^{1012} = a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}(x-a)^{1012}(x+2)^{1012}$$

$$= P(x)(x-1)^{1012}(x+2)^{1012}$$

$\Rightarrow P(x^2 - 2)$ chia hết cho đa thức $P(x)$

Vậy tồn tại đa thức $P(x) = a(x+1)^{1012}(x-2)^{1012}$ với hệ số thích, có bậc 2024 thỏa mãn đa thức $P(x^2 - 2)$ chia hết cho đa thức $P(x)$.

Câu 3.

$$a) \begin{cases} 2(x + \sqrt{x^2 - x + 1}) = 1 - y + \sqrt{y^2 + 3} & (1) \\ y^2 - 2(x - 2) = 3\sqrt{(y+1)(y^2 + 2x)} & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1)

$$\Rightarrow (2x + y - 1) = \sqrt{y^2 + 3} - 2\sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (2x + y - 1) = [y^2 + 3 - 4(x^2 - x + 1)] \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3} + 2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$\Leftrightarrow (2x + y - 1) = [y^2 + 3 - 4(x^2 - x + 1)] \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3} + 2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$\Leftrightarrow (2x + y - 1) = [y^2 - (2x - 1)^2] \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3} + 2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$\Leftrightarrow (2x + y - 1) = (y - 2x + 1) \cdot (y + 2x - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3} + 2\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

$$\Leftrightarrow (2x + y - 1) \left[\frac{y - 2x + 1}{\sqrt{y^2 + 3} + 2\sqrt{x^2 - x + 1}} - 1 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ y - 2x + 1 = \sqrt{y^2 + 3} + 2\sqrt{x^2 - x + 1} \end{cases}$$

+)Trường hợp 1: $2x + y - 1 = 0 \Rightarrow 2x = -y + 1$ thay vào phương trình (2) ta được

$$(2) \Leftrightarrow y^2 - 1 + y + 4 = 3\sqrt{(y+1)(y^2 - y + 1)} \Leftrightarrow y^2 - y + 1 + 2y + 2 = 3\sqrt{(y+1)(y^2 - y + 1)}$$

$$\text{Đặt } a = y + 1; b = y^2 - y + 1 \Rightarrow 2a^2 - 3ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(2a - b) = 0$$

$$\text{Với } a = b \Rightarrow y + 1 = y^2 - y + 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ y = 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $2a = b \Rightarrow 2y + 2 = y^2 - y + 1 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{13}+3}{2} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{13}-1}{4} \\ y = \frac{-\sqrt{13}+3}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13}-5}{4} \end{cases}$

+) Trường hợp 2: $y - 2x + 1 = \sqrt{y^2 + 3} + 2\sqrt{x^2 - x + 1}$ ĐK $y - 2x + 1 \geq 0$

Bình phương hai vế ta được

$$(y - 2x + 1)^2 = y^2 + 3 = 4(x^2 - x + 1) + 4\sqrt{(y^2 + 3)(x^2 - x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4x^2 + 1 - 4xy - 4x + 2y = y^2 + 4x^2 - 4x + 7 + 4\sqrt{(y^2 + 3)(x^2 - x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 2y - 6 = 4\sqrt{(y^2 + 3)(x^2 - x + 1)} \quad (3)$$

Điều kiện: $y \geq 2x + 3$

Bình phương hai vế của (3) ta được

$$(-2x^2 + y - 3)^2 = 4(y^2 + 3)(x^2 - x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 9 - 4xy + 12x - 6y = 4x^2y^2 - 4xy^2 + 4y^2 + 12x^2 - 12x + 12$$

$$\Leftrightarrow 3(4x^2 + y^2 + 1 - 4xy - 4x + 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - y - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = y + 1$$

Kết hợp với điều kiện $y \geq 2x + 3$

Ta có $2x = y + 1 \geq 2x + 4 \Leftrightarrow 0 \geq 4$ (vô lí)

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm

$$(x; y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}; 0 \right); \left(\frac{-1}{2}; 2 \right); \left(\frac{-\sqrt{13}-1}{4}; \frac{\sqrt{13}+3}{2} \right); \left(\frac{\sqrt{13}-5}{4}; \frac{-\sqrt{13}+3}{2} \right) \right\}$$

b) Gọi 11 số nguyên dương là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$. Ta có $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{11} = 30$

Xét dãy 11 số $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{11}$

Nếu trong dãy không có số nào chia hết cho 10 thì tồn tại ít nhất 2 số chia 10 có cùng số dư. Nên hiệu chia hết cho 10.

Đặt hiệu đó là A . Với A là tổng của một số số a_i (với $i \in \{1, 2, 3, \dots, 11\}$)

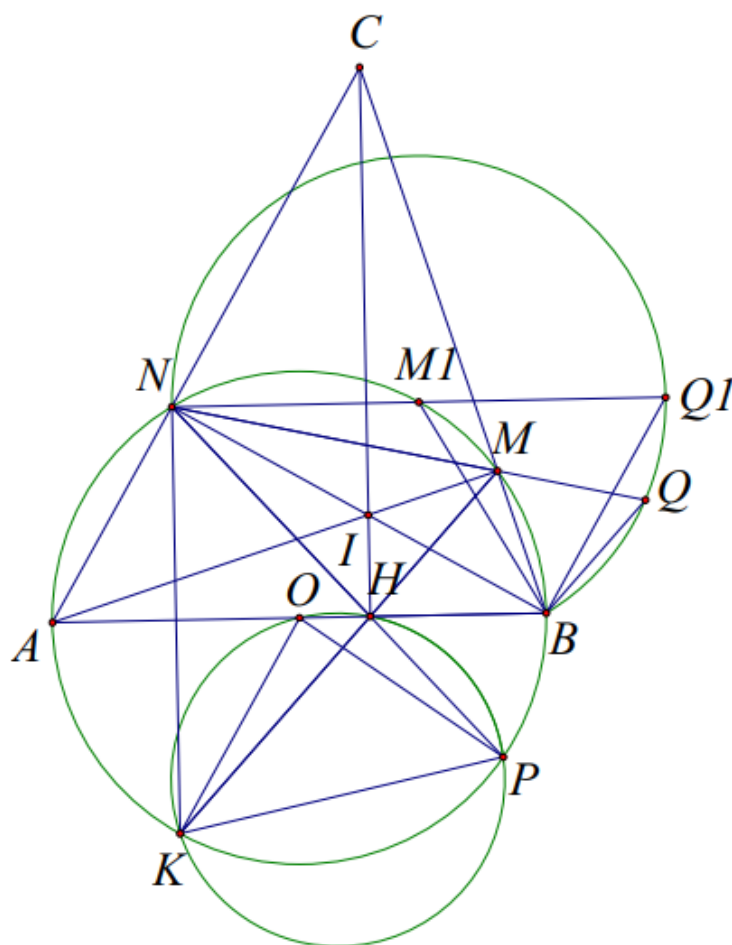
Ta có $0 < A < 30$ mà $A:10$ nên $A \in \{10; 20\}$

Nếu $A = 10$ bài toán được chứng minh.

Nếu $A = 20$ mà $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{11} = 30$ suy ra các số còn lại có tổng bằng 10. Bài toán được chứng minh.

Nếu trong dãy số có 1 số chia hết cho 10. Chứng minh tương tự như trên khi đó bài toán được chứng minh.

Câu 4.



a) Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

AM cắt BN tại $I \Rightarrow I$ là trực tâm $CI \perp AB$

$\Rightarrow AI \perp CB \Rightarrow B, M, C$ thẳng hàng.

Dễ thấy $\triangle BCH \sim \triangle ICM \Rightarrow CB.CM = CI.CH$

Dễ thấy $\widehat{NHI} = \widehat{MHI} = \widehat{MBI} = \widehat{IAN} \Rightarrow \widehat{NHA} = \widehat{BHM}$

Mà $\widehat{NHA} = \widehat{KHA}$ tính chất đối xứng

$\Rightarrow \widehat{AHK} = \widehat{BHM}$ mà $\widehat{BHM} + \widehat{MHA} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AHK} + \widehat{AHM} = 180^\circ$ suy ra K, H, M thẳng hàng.

b) Ta có $\widehat{PHK} = 2\widehat{PNK}$ (góc ngoài $\triangle HNK$ cân)

$\widehat{KOP} = 2\widehat{KNP}$ góc nội tiếp

$\Rightarrow$ Tứ giác $KOHP$ nội tiếp vì N cố định suy ra OK cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KHP thuộc trung trực OK .

c) Ta có $\widehat{NMB} = 120^\circ$. Trên tia đối MN lấy Q sao cho $MB = MQ \Rightarrow \widehat{NQB} = 60^\circ$

NB cố định $\Rightarrow Q$ thuộc cung chứa góc 60° dựng trên $NB \Rightarrow MN + MB$ lớn nhất khi NQ là đường kính của đường tròn

$MB = MQ = MN \Rightarrow M \equiv M1, Q \equiv Q1$.

Vậy M là trung điểm cung $NB \Rightarrow MN + MB$ lớn nhất $MN + NB = 2R$

Câu 5.

Ta có $\left(a\sqrt{a^2+9bc} + b\sqrt{b^2+9ac} + c\sqrt{c^2+9ab}\right).F \geq (a+b+c)^2$

Đặt $Q = a\sqrt{a^2+9bc} + b\sqrt{b^2+9ac} + c\sqrt{c^2+9ab}$

$Q^2 = \left[\sqrt{a}\sqrt{a^3+9ac} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+9ac} + \sqrt{c}\sqrt{c^3+9ab}\right]^2 \leq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+27abc)$

Ta lại có $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a) \leq (a+b+c)^3 - 24abc$

$\Rightarrow (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+27abc) \leq (a+b+c)\left[(a+b+c)^3+3abc\right]$ mà $3abc \leq \frac{(a+b+C)^3}{9}$

$\Rightarrow (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+27abc) \leq \frac{10(a+b+c)^4}{9}$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{\sqrt{10}(a+b+c)^2}{3} \text{ mà } \left(a\sqrt{a^2+9bc} + b\sqrt{b^2+9ac} + c\sqrt{c^2+9ab}\right).F \geq (a+b+c)^2$$

$$\text{Suy ra } F \geq \frac{3\sqrt{10}}{10}. \text{ Vậy min } F = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$