

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề gồm 01 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1) = (a-1)(b-1)(c-1)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c)^2 + 1$

b) Cho hàm số $f(x) = (-m^2 + 4m - 10)x^2$ với m là tham số thực và các số

$$a = \sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{2021}; \quad b = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{2020} + \frac{\sqrt{2022}}{2}$$

c) Cho đa thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Giả sử $P(0), P(1), P(2)$ là các số nguyên. Chứng minh rằng $P(2022)$ là một số nguyên

Câu 2. (2,5 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau :

a) $3(x+1)\sqrt{x^2+x+3} - 3x^2 - 4x - 7 = 0$

b)
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \\ 8 + 4\sqrt{xy} = \sqrt{x+1}(\sqrt{16x+16}-3) + \sqrt{y+1}(\sqrt{16y+16}-3) \end{cases}$$

Câu 3. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và có các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H . Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC (Q khác B, Q khác C). Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của Q qua AB và AC ; J là giao điểm của QE và AB, I là giao điểm của QF và AC

a) Chứng minh $MH.MA = MP.MN$

b) Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng

c) Biết $BC = R\sqrt{3}$, tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$

Câu 4. (1,0 điểm) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn :

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức :

ĐÁP ÁN

$$\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 3$$

Câu 1. (2,0 điểm)

d) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1) = (a-1)(b-1)(c-1)$.

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c)^2 + 1$

Từ giả thiết có:

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 = abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca = -1 \Leftrightarrow P = a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c)^2 + 1 = -2(ab + bc + ca) + 1 = 3$$

Vậy $P = 3$

e) Cho hàm số $f(x) = (-m^2 + 4m - 10)x^2$ với m là tham số thực và các số

$$a = \sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{2021}; \quad b = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{2020} + \frac{\sqrt{2022}}{2}$$

Với n nguyên dương, có $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})^2 = 2n + 2\sqrt{n^2 - 1} < 2n + 2\sqrt{n^2} = 4n$

$\Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}$. Ta thấy $n = 1, 3, 5, \dots, 2021$ ta có :

$\sqrt{2} + \sqrt{0} < 2\sqrt{1}; \sqrt{4} + \sqrt{2} < 2\sqrt{3}, \dots, \sqrt{2022} + \sqrt{2020} < 2\sqrt{2021}$. Cộng từng vế các BĐT ta được :

$$(\sqrt{2} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{2022}) + (\sqrt{0} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2020}) < 2(\sqrt{1} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2021})$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{2} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{2020}) + \sqrt{2022} < 2(\sqrt{1} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{2021})$$

$$\Rightarrow 2b < 2a \Rightarrow 0 < b < a$$

$$\Rightarrow f(a) - f(b) = (-m^2 + 4m - 10)(a^2 - b^2) = [-6 - (m-2)^2](a-b)(a+b) < 0$$

$$\Rightarrow f(a) < f(b)$$

Vậy $f(a) < f(b)$

f) Cho đa thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Giả sử $P(0), P(1), P(2)$ là các số nguyên. Chứng minh rằng $P(2022)$ là một số nguyên

Ta có $P(0) = c, P(1) = a + b + c, P(2) = 4a + 2b + c$ là các số nguyên

$$\Rightarrow (4a + 2b + c) - c = 4a + 2b \in \mathbb{Z} \text{ và } (a + b + c) - c = a + b \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (4a + 2b) - 2(a + b) = 2a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2(a + b) - 2a = 2b \in \mathbb{Z}$$

Do $2b \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2022b \in \mathbb{Z}, do 2a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2022^2 a \in \mathbb{Z}$, kết hợp với $c \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow 2022^2 a + 2022b + c \in \mathbb{Z} \Rightarrow P(2022) \in \mathbb{Z}$$

Vậy $P(2022)$ là số nguyên

Câu 2. (2,5 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau :

$$a) 3(x+1)\sqrt{x^2+x+3} - 3x^2 - 4x - 7 = 0$$

ĐKXD: $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta đặt } x+1=a, \sqrt{x^2+x+3}=b (b>0) \Rightarrow a^2+2b^2=3x^2+4x+7$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành : } 3ab = a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a-2b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=2b \end{cases}$$

$$*) a=b \Rightarrow x+1=\sqrt{x^2+x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x+1=x^2+x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

$$*) a=2b \Rightarrow x+1=2\sqrt{x^2+x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x+1=4x^2+4x+12 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$

$$b) \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \\ 8+4\sqrt{xy} = \sqrt{x+1}(\sqrt{16x+16}-3) + \sqrt{y+1}(\sqrt{16y+16}-3) \end{cases}$$

ĐKXD: $x \geq -1; y \geq -1; xy \geq 0$. Ta có :

$$\begin{aligned} hpt &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \\ 8+4\sqrt{xy} = 4(x+y+1) - 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \\ 8+4\sqrt{xy} = 4(x+y) + 8 - 3 \cdot 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \\ x - \sqrt{xy} + y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki có :

$$4 = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} \leq \sqrt{2(x+y+2)} - 2(x+y+2) \geq 16 \Rightarrow x+y \geq 6(1)$$

Mà lại có $xy \geq 0$. Từ đây ta có $x, y \geq 0$. Áp dụng BĐT AM-GM ta có :

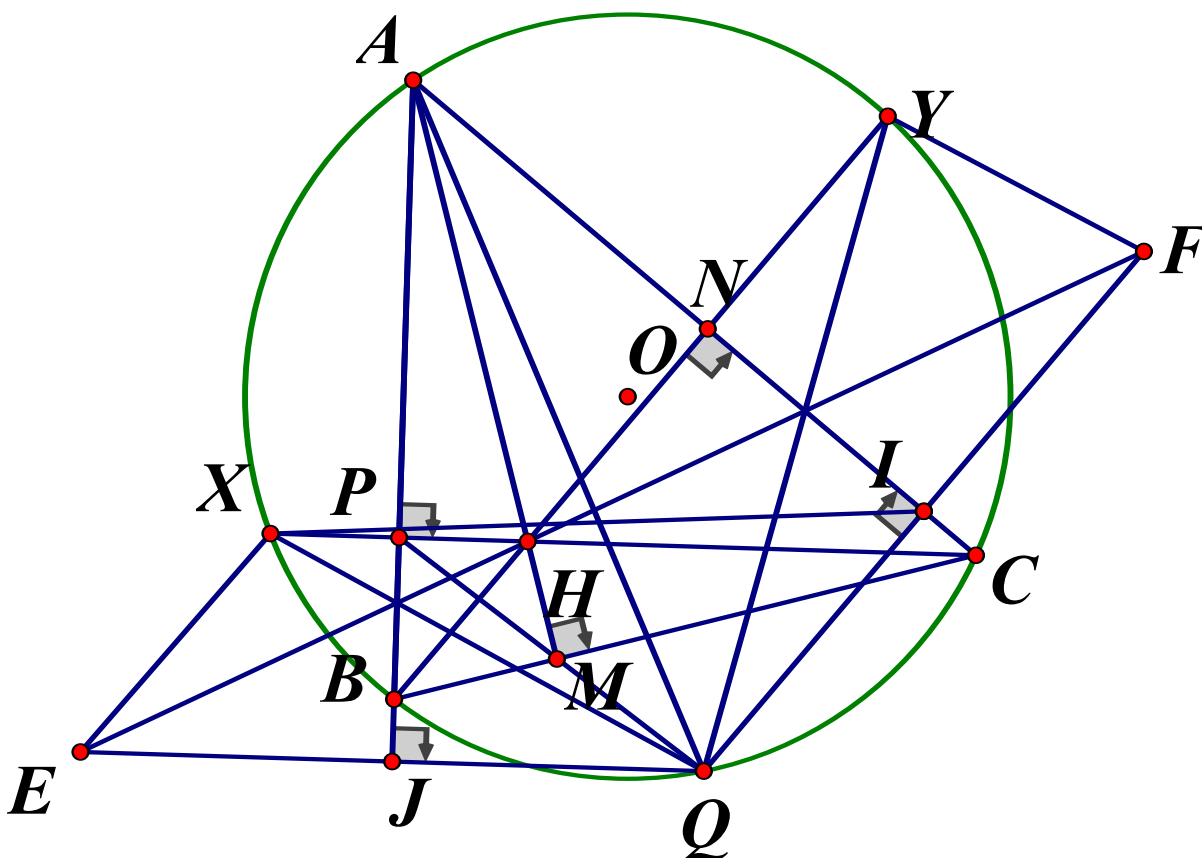
$$3 = x - \sqrt{xy} + y \geq x - \frac{x+y}{2} - y = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y \leq 6(2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \text{dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=y+1 \\ x=y \\ x+y=6 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=3(tm)$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (3; 3)$

Câu 3. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn $(O; R)$ và có các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H . Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung

nhỏ BC (Q khác B , Q khác C). Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của Q qua AB và AC ; J là giao điểm của QE và AB , I là giao điểm của QF và AC



d) Chứng minh $MH.MA = MP.MN$

Tứ giác $APMC$ có $\angle APC = \angle AMC = 90^\circ$ (Do CP, AM là đường cao của $\triangle ABC$)

$\Rightarrow$ tứ giác $APMC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC

$\Rightarrow \angle MPC = \angle MAC$ hay $\angle MPH = \angle MAN$

Từ tứ giác $APMC$ nội tiếp ta cũng có $\angle BMP = \angle BAC$ và tương tự thì $\angle CMN = \angle CAB$

$\Rightarrow \angle BMP = \angle CMN (= \angle BAC)$, kết hợp với $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle PMH = \angle AMN$ (phép cộng góc)

$\Rightarrow \triangle PHM \sim \triangle ANM (g.g) \Rightarrow \frac{MH}{MN} = \frac{MP}{MA} \Leftrightarrow MA.MH = MP.MN$

e) Chứng minh ba điểm E, H, F thẳng hàng

Gọi BH, CH giao (O) tại điểm thứ hai lần lượt là X, Y

Ta sẽ chứng minh H đối xứng X qua AB

Ta có $\angle XBP = \angle ACP$ (do tứ giác $ACBX$ nội tiếp) và tứ giác $BPNC$ nội tiếp đường kính BC (do $\angle BPC = \angle BNC = 90^\circ$) $\Rightarrow \angle ACP = \angle PBH$

$\Rightarrow \angle XBP = \angle PBH$ và $BP \perp HX \Rightarrow \Delta HBP$ cân $\Rightarrow PH = PX$ (đpcm)

Theo các tính chất của phép đối xứng thì ta thu được tứ giác $EXHQ$ là hình thang cân $\Rightarrow \angle XHE = \angle QXH = \angle QAC$ (tính chất góc nội tiếp)

Tương tự ta có Y đối xứng với H qua AC và $\angle YHF = \angle QYH = \angle QAB$

Mà $\angle XHY = 180^\circ - \angle BAC$ (do tứ giác $APHN$ nội tiếp)

$\Rightarrow \angle XHE + \angle YHF + \angle XHY = \angle QAC + \angle QAB - \angle BAC + 180^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow E, H, F$ thẳng hàng

f) Biết $BC = R\sqrt{3}$, tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$

Ta chứng minh các bổ đề sau :

1) Cho tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$ thì $\sin \angle BAC = \frac{BC}{2R}$

Ta có thể chứng minh bằng cách kẻ OM vuông góc BC tại trung điểm M của nó . Khi đó $BM = R \cdot \sin \frac{\angle BOC}{2} = R \cdot \sin \angle BAC \Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{BC}{2R}$ ($BC = 2BM$)

2) Cho tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$ và $BC = R\sqrt{3}$ thì $\angle BAC = 60^\circ$

Chứng minh dựa theo bổ đề đầu tiên $\Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ$

3) Định lý Ptolemy: $AB \cdot QC + AC \cdot BQ = AQ \cdot BC$

4) $BC^2 = QB^2 + QB \cdot QC + QC^2$

Áp dụng bổ đề 1 và định lý 3, ta có biến đổi sau :

$$\frac{AB}{QJ} = \frac{AB}{AQ} \cdot \frac{QJ}{AQ} = \frac{AB}{AQ} \cdot \frac{1}{\sin \angle QAB} = \frac{AB}{AQ} \cdot \frac{2R}{BQ}$$

$$\frac{AC}{QI} = \frac{AC}{AQ} \cdot \frac{QI}{AQ} = \frac{AC}{AQ} \cdot \frac{1}{\sin \angle QAC} = \frac{AC}{AQ} \cdot \frac{2R}{CQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI} = \frac{2R}{AQ} \cdot \left(\frac{AB}{BQ} + \frac{AC}{CQ} \right) = \frac{2R}{AQ} \cdot \frac{AB \cdot CQ + AC \cdot BQ}{QB \cdot QC} = \frac{2R}{AQ} \cdot \frac{AQ \cdot BC}{QB \cdot QC} = \frac{2\sqrt{3}R^2}{QB \cdot QC}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow 3R^2 = QB^2 + QB \cdot QC + QC^2 = (QB - QC)^2 + 3QB \cdot QC \Rightarrow QB \cdot QC \leq R^2$$

(do $(QB - QC)^2 \geq 0$).

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $QB = QC \Leftrightarrow Q$ là điểm chính giữa cung BC

$$\Rightarrow \min \frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow Q \text{ là điểm chính giữa cung } BC \text{ không chứa } A$$

Câu 4. (1,0 điểm) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn :

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$$

$$\text{Đặt } 2^x = a \Rightarrow (a+1)(a+2)(a+3)(a+4) - 5^y = 11879$$

$$\Leftrightarrow [(a+1)(a+4)][(a+2)(a+3)] - 5^y = 11879$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 5a + 4)(a^2 + 5a + 6) - 5 = 11879$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 5a + 5)^2 - 5^y = 11880$$

$$\text{Nếu } y \geq 1 \Rightarrow 5^y : 5 \Rightarrow (a^2 + 5a + 5)^2 : 5 \Rightarrow a^2 + 5a + 5 : 5 \Rightarrow (a^2 + 5a + 5)^2 : 25$$

$$\text{Như vậy nếu } y \geq 2 \Rightarrow 5^y : 25 \Rightarrow 11880 : 25 \text{ (vô lý)}$$

$$\Rightarrow y < 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow (a^2 + 5a + 5)^2 = 11885 (ktm) \\ y = 0 \Rightarrow (a^2 + 5a + 5)^2 = 11881 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3 \end{cases}$$

Thử lại với $(x, y) = (3, 0)$ ta thấy thỏa mãn.

Vậy $(x, y) = (3, 0)$ là cặp số duy nhất thỏa mãn đề bài

Câu 5. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 3$$

$$\text{Ta có : } \frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} = \frac{4a^2 + 2(b^2 + c^2) - (b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} = 2 - \frac{(b+c)^2}{(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2)}$$

$$\geq 2 - \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} \right) - \frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} \geq 2 - \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} \right) (1)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có : } \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} \geq 2 - \left(\frac{c^2}{b^2 + c^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) (2)$$

$$\frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 2 - \left(\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right) (3)$$

Cộng từng vế các BĐT (1), (2), (3) ta có :

$$\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 6 - \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2} \right) = 3$$

Dấu = xảy ra khi $a = b = c$

$$\text{Vậy } \frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 3 \Leftrightarrow a = b = c$$