

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM NGÀY 1

Bài 1. (5,0 điểm) Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 1$; $x_{n+1} = \frac{(x_n + 1)^{2025}}{2025} + x_n$, $\forall n \geq 1$.

Đặt $u_n = \frac{(x_1 + 1)^{2024}}{x_2 + 1} + \frac{(x_2 + 1)^{2024}}{x_3 + 1} + \frac{(x_3 + 1)^{2024}}{x_4 + 1} + \dots + \frac{(x_n + 1)^{2024}}{x_{n+1} + 1}$, $\forall n \geq 1$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 1. (5 điểm)	Ta có $x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n + 1)^{2025}}{2025}$, $\forall n \geq 1$.	2,0 điểm
	Suy ra $\frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{(x_n + 1)(x_{n+1} + 1)} = \frac{(x_n + 1)^{2024}}{2025(x_{n+1} + 1)}$	
	$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + 1)^{2024}}{x_{i+1} + 1} = 2025 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i + 1} - \frac{1}{x_{i+1} + 1} \right) = 2025 \left(\frac{1}{x_1 + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} \right)$	1,0 điểm
	Mặt khác: $x_{n+1} - x_n \geq 0$ nên dãy (x_n) là dãy số tăng $\forall n \geq 1$. Nếu (x_n) bị chặn thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ tồn tại. Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Rightarrow a \geq 1$ và $a = \frac{(a + 1)^{2025}}{2025} + a$ (vô lý). Suy ra (x_n) không bị chặn trên hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_{n+1} + 1} = 0$	1,0 điểm
	Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2025}{2}$	1,0 điểm

Bài 2. (5,0 điểm) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn điều kiện

$$P(a + b - 2c) + P(b + c - 2a) + P(c + a - 2b) = 3P(a - b) + 3P(b - c) + 3P(c - a)$$

với mọi số thực a, b, c .

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 2 (5 điểm)	Đặt $x = a - b$, $y = b - c$, ta có: $P(x - 2y) + P(-2x - y) + P(x - y) = 3P(x) + 3P(y) + 3P(-x - y)$	1,0 điểm
	Cho $x = y = 0$, ta được $P(0) = 0$.	1,0 điểm
	Cho $y = 0$, ta được $P(-2x) = P(x) + 3P(-x)$. (*)	
	Đặt $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x$. Từ (*), ta có $(-2)^k a_k = a_k + 3(-1)^k a_k$ với $k \in \overline{1, n}$	1,0 điểm

	Hay $a_k \left((-2)^k - 1 - 3(-1)^k \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_k (2^k - 4) = 0, k \geq 2 \\ a_k (2 - 2^k) = 0, k \leq 1 \end{cases}$	1,0 điểm
	Với $k \geq 3$, suy ra $a_k = 0 \Rightarrow P(x) = \alpha x^2 + \beta x$. Thử lại đúng. Vậy, đa thức cần tìm là $P(x) = \alpha x^2 + \beta x$, với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.	1,0 điểm

Bài 3. (5,0 điểm)

a) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn bộ số (m, n, p) nguyên dương sao cho

$$4mn - m - n = p^2 - 1.$$

b) Chứng minh rằng không tồn tại bộ số (m, n, p) nguyên dương sao cho $4mn - m - n = p^2$.

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 3 (5. điểm)	a) Xét $m = \frac{1}{2}t(t-1); n = \frac{1}{2}t(t+1)$ thì $4mn - m - n = (t^2 - 1)^2 - 1 = p^2 - 1$.	2,0 điểm
	b) Giả sử tồn tại (m, n, p) nguyên dương sao cho $4mn - m - n = p^2$. Khi đó $(4m-1)(4n-1) = 4p^2 + 1$.	1,0 điểm
	Gọi q là ước nguyên tố bất kì của $4m-1$, suy ra $(2p)^2 \equiv -1 \pmod{q}$. Theo định lý Fermat ta có $(2p)^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Do đó $1 \equiv (2p)^{q-1} \equiv \left((2p)^2 \right)^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{q-1}{2}} \pmod{q} \Rightarrow q \equiv 1 \pmod{4}$	1,0 điểm
	Như vậy mọi ước nguyên tố của $4m-1$ đều có dạng $q \equiv 1 \pmod{4}$, suy ra $4m-1 \equiv 1 \pmod{4}$, mâu thuẫn. Bài toán được chứng minh.	1,0 điểm

Bài 4. (5,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AC > AB$) có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC và E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ B, C của tam giác ABC . Điểm P là giao điểm của MN với tiếp tuyến của (O) tại A . Điểm Q là giao điểm thứ hai của (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Điểm R là giao điểm của AQ và EF . Chứng minh rằng PR vuông góc với OH .

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
-----	--------------------	------

Bài 4. (5 điểm)		1,0 điểm
	Các đường tròn $(AQEF), (O), (BEFC)$ cắt nhau đôi một theo các trục đẳng phương AQ, BC, EF nên AQ, BC, EF đồng quy tại R.	1,0 điểm
	Gọi $K = OH \cap (AQEF)$. Dễ thấy A, M, K, O, N đồng viên. Thật vậy Ta có $\widehat{ANO} = 90^\circ$ (ON là trung trực AC) $\widehat{AMO} = 90^\circ$ (OM là trung trực AB) Mặt khác tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH suy ra $\widehat{AKH} = 90^\circ$. Do đó $\widehat{AKO} = 90^\circ$. Suy ra A, M, K, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.	1,0 điểm
	Các đường tròn $(AMK), (EMFN), (AQHF)$ cắt nhau đôi một tại các trục đẳng phương EF, MN, AK nên EF, MN, AK đồng quy tại S.	1,0 điểm
	Ta có: $AO \perp EF, AO \perp AP$ nên $EF \parallel AP$. Lại thấy MN là đường trung bình của tam giác ARC nên PS đi qua trung điểm AR. Mà $AP \parallel RS$ nên $APRS$ là hình bình hành.	1,0 điểm
	Do đó $PR \parallel AK$ mà $AK \perp OH$ nên $PR \perp OH$.	1,0 điểm

----- Hết -----