

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG	KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2024-2025
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn: TOÁN Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề) Ngày thi: 29/8/2024 Đề thi gồm 01 trang, 03 câu.

Câu 5 (7.0 điểm) Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2xf(x) - 2f(y)) = 2x^2 - y - f(y), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

- Chứng minh rằng f là hàm lẻ.
- Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn (1).

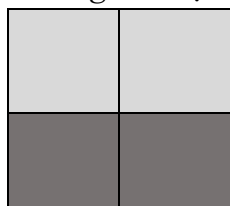
Câu 6 (7.0 điểm) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn phương trình $a^b + 1 = c$

- Chứng minh rằng không tồn tại hai ước $u, v (u > v)$ của c sao cho $2|u-v$ và b chia hết cho $u-v$.
- Cho $m \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $(c, m) = 1$. Giả sử b là lũy thừa của 2, đồng thời với mọi số nguyên dương n và với mọi p là ước nguyên dương của c thì $m.p + a^n$ là lũy thừa của a . Chứng minh rằng c không có ước chính phương.

Câu 7 (6.0 điểm) Cho bảng ô vuông $n \times n$ với n là số nguyên dương. Ta gọi tập hợp n ô vuông trong cùng một hàng hoặc một cột là một *dãy ô*. Với k là số nguyên dương cho trước, số n được gọi là k -*tốt* nếu tồn tại cách đặt các quân domino vào bảng ô vuông sao cho mọi dãy ô có đúng k ô được phủ bởi các quân domino (các quân domino được đặt sao cho mỗi quân phủ đúng 2 ô của bảng và không có ô nào được phủ bởi 2 quân domino khác nhau, tức các quân domino không xếp chồng lên nhau).

- Chứng minh rằng $n=4$ là 3-*tốt* và $n=3$ không là 3-*tốt*.
- Giả sử tồn tại số nguyên dương k sao cho n là k -*tốt* và thỏa mãn ứng với mỗi dãy ô có tối đa 1 quân domino phủ đồng thời 2 ô, trong đó có ít nhất n dãy ô mà ở từng dãy, mỗi quân domino chỉ phủ đúng 1 ô. Chứng minh rằng số quân domino dùng để phủ bảng thỏa mãn bằng n và chỉ ra cách đặt quân domino thỏa mãn.

Domino là một hình chữ nhật gồm hai ô vuông đơn vị 2×1 hoặc 1×2 .



Ví dụ với $k=2, n=2$ là 2-*tốt*.

-----**HẾT**-----

Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.