

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 12/12/2020

(Đề thi có 08 câu, gồm 01 trang)

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. (3,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - (2m - 1)x^2 + (1 - m)x$ (m là tham số thực) có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B và C sao cho tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B và C nhỏ hơn 9.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình sau trên tập số thực $5x^2 - 10x = 4(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

b) Cho 3 số thực $x > 1, y > 1$ và $z > 1$ thỏa mãn

$$\log_{(xy+yz+zx)}(5x^2 + 16y^2 + 27z^2) + \log_{12}\sqrt[4]{xy + yz + zx} = 2. \text{ Tính } M = x + y + z.$$

Câu 3. (2,0 điểm) Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển

$$\left(\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x\sqrt{x+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x} \right)^n, \text{ với } x > 0 \text{ và } n \in \mathbb{N}^* \text{ thỏa mãn } A_n^2 - nC_n^2 + 55n = 0.$$

Câu 4. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC thỏa mãn

$$2019 \sin A + 2020 \sin B + 2021 \sin C = 2022 \cos \left(\frac{A}{2} \right) + 2020 \cos \left(\frac{B}{2} \right) + 2018 \cos \left(\frac{C}{2} \right).$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 2021$ và $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$,

đặt $v_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$. Tính $\lim v_n$.

Câu 6. (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung

điểm của đoạn BC , K là hình chiếu vuông góc của H lên AC . Biết $M\left(\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn

HK , đường thẳng BK có phương trình $x + 7y - 13 = 0$. Gọi N là giao điểm của BK và AM . Tìm tọa

độ điểm A , biết $I\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn AB .

Câu 7. (2,0 điểm) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) và O là trung điểm của đoạn AH . Gọi (α) là mặt phẳng qua O và không đi qua các điểm A, B, C và D . Mặt phẳng (α) cắt các đoạn AB, AC và AD lần lượt tại M, N và P . Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM \cdot AN \cdot AP$ theo a .

Câu 8. (2,0 điểm) Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2021x$, a, b và c là ba số thực dương sao cho phương trình $f[(a + b + c)x] + f(2020 - 3x) = 0$ vô nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{ab + bc + ca}.$$

----- HẾT -----

Câu 1: (4 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (1-m)x$ (m là tham số thực) có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt A, B và C sao cho tổng hệ số góc của ba tiếp tuyến với (C) tại các điểm A, B và C nhỏ hơn 9.

Câu 2: (4 điểm) a/ Giải phương trình sau trên tập số thực: $5x^2 - 10x = 4(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$.
b/ Cho 3 số thực $x > 1, y > 1, z > 1$ thỏa mãn:

$$\log_{(xy+yz+zx)}(5x^2 + 16y^2 + 27z^2) + \log_{12} \sqrt[4]{xyz + yz + zx} = 2. \text{ Tính } M = x + y + z.$$

Câu 3: (2 điểm) Tìm hệ số của số hạng không chứa x trong khai triển $\left[\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x\sqrt{x+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt[4]{x} \right]^n$, với $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $A_n^2 - nC_n^2 + 55n = 0$.

Câu 4: (2,0 điểm) Cho tam giác ABC thỏa mãn

$$2019 \sin A + 2020 \sin B + 2021 \sin C = 2022 \cos\left(\frac{A}{2}\right) + 2020 \cos\left(\frac{B}{2}\right) + 2018 \cos\left(\frac{C}{2}\right) \quad (1).$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Câu 5: (3 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 2021$ và $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$, đặt $v_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$. Tính $\lim v_n$.

Câu 6: (2 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của đoạn BC , K là hình chiếu vuông góc của H lên AC . Biết $M\left(\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn HK , đường thẳng $BK: x + 7y - 13 = 0$. Gọi N là giao điểm của BK và AM . Tìm tọa độ điểm A , biết $I\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn AB .

Câu 7: (2 điểm) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) và O là trung điểm của đoạn AH . Gọi (α) là mặt phẳng qua O và không đi qua các điểm A, B, C và D . Mặt phẳng (α) cắt các đoạn AB, AC và AD lần lượt tại M, N và P . Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM \cdot AN \cdot AP$ theo a .

Câu 8: (2 điểm) Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2021x$, gọi a, b, c là các số thực dương sao cho phương trình $f[(a+b+c)x] + f(2020-3x) = 0$ vô nghiệm.

Tìm GTNN của biểu thức $M = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{ab + bc + ac}$.

HẾT