

Bài số 1. (1,5 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(2;-3)$ và $B(7;7)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox để ba điểm M, A, B thẳng hàng
- 2) Cho a là nghiệm của phương trình $6x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$. Tính giá trị của biểu thức :
 $T = 12a^4 - a^2 + 2a$

Bài số 2. (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 3x - 10}) = 7$
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

Bài số 3. (2,0 điểm)

- 1) Tìm tất cả các nghiệm $(x; y; z)$ của phương trình $x(x^2 + x + 1) = z^y - 1$ thỏa mãn x, y là các số nguyên và z là số nguyên tố
- 2) Tìm các số thực x sao cho $x + \sqrt{2022}$ và $\frac{3}{x} - \sqrt{2022}$ đều là các số nguyên

Bài số 4. (3,0 điểm)

- 1) Cho đường tròn (O) có đường kính AB . Lấy điểm C thuộc đoạn AO (C khác A, O). Vẽ đường tròn (I) đường kính BC . Vẽ tiếp tuyến AD và cát tuyến AEF với đường tròn (I) (E nằm giữa A và F) sao cho tia AO nằm giữa hai tia AD, AE . Đường thẳng vuông góc với AB vẽ từ C cắt đường tròn (O) tại hai điểm, gọi một trong hai giao điểm đó là N sao cho N và D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB . Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng DI và NB . Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng DN và AS . Gọi J là trung điểm của SD
 - a) Chứng minh tam giác AND là tam giác cân
 - b) Gọi L, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$ và $\triangle SEF$. Chứng minh rằng ba điểm J, L, T thẳng hàng
- 2) Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích S . Tứ giác $MNPQ$ có 4 đỉnh M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông đã cho và không trùng với đỉnh của hình vuông. Chứng minh rằng $S \leq AC \cdot \frac{MN + NP + PQ + QM}{4}$

Bài số 5. (1,5 điểm)

- a) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3}{3y+1} + \frac{y^3}{3z+1} + \frac{z^3}{3x+1}$
- b) Có 10 bạn học sinh tham gia thi đấu bóng bàn. Hai bạn bất kỳ đều phải đấu với nhau một trận, bạn nào cũng phải gặp 9 đối thủ của mình và không có trận đấu hòa. Chứng minh rằng có thể sắp xếp 10 bạn này thành một hàng dọc sao cho bạn đứng trước thắng bạn đứng kề sau

ĐÁP ÁN

Bài số 1. (1,5 điểm)

3) Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(2;-3)$ và $B(7;7)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox để ba điểm M, A, B thẳng hàng

Gọi $(d): y = ax + b$ là đường thẳng đi qua hai điểm A và B . Khi đó :

$$\begin{cases} -3 = 2a + b \\ 7 = 7a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases} \Rightarrow (d): y = 2x - 7$$

Ba điểm M, A, B thẳng hàng $\Leftrightarrow M \in (d)$. Mà $M \in Ox$ nên $M(k;0)$ và

$$0 = 2k - 7 \Leftrightarrow k = \frac{7}{2}$$

$$\text{Vậy } M\left(\frac{7}{2}; 0\right)$$

4) Cho a là nghiệm của phương trình $6x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$. Tính giá trị của biểu thức : $T = 12a^4 - a^2 + 2a$

Vì a là nghiệm của phương trình $6x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$ nên :

$$6a^2 + \sqrt{3}a - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (6a^2)^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{3}a)^2$$

$$\Leftrightarrow 36a^4 = 3a^2 - 6a + 3 \Leftrightarrow 12a^4 = a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow 12a^4 - a^2 + 2a = 1$$

Vậy $T = 1$

Bài số 2. (2,0 điểm)

3) Giải phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 3x - 10}) = 7$

Xét phương trình $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 3x - 10}) = 7(1)$ (Điều kiện: $x \geq 2$)

Phương trình (1) có thể viết lại thành :

$$(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x-2}) = 7$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+5} \\ b = \sqrt{x-2} \end{cases} (a > b \geq 0)$ thì $a^2 - b^2 = 7$ và phương trình trên trở thành :

$$(a-b)(1+ab) = a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a-b)(1+ab-a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(1-a)(1-b) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ 1-b=0 \end{cases} \text{ (do } a > b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5}=1 \\ \sqrt{x-2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4(ktm) \\ x=3(tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$

4) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 6(i) \\ xy + yz + zx = 11(ii) \\ xyz = 6(iii) \end{cases}$$

Từ (i) $\Rightarrow x + y = 6 - z$, (iii) $\Leftrightarrow xy = \frac{6}{z}$. Thay vào (ii) ta được :

$$\frac{6}{z} + z(6 - z) = 11 \Leftrightarrow z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(z-2)(z-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

- Với $z = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; y = 3 \\ x = 3; y = 2 \end{cases}$
- Với $z = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 3 \\ x = 3, y = 1 \end{cases}$
- Với $z = 3 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 2 \\ x = 2, y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $(x; y; z)$ là tất cả các hoán vị của $(1; 2; 3)$

Bài số 3. (2,0 điểm)

3) Tìm tất cả các nghiệm $(x; y; z)$ của phương trình $x(x^2 + x + 1) = z^y - 1$ thỏa mãn

x, y là các số nguyên và z là số nguyên tố

Biến đổi giả thiết thành $(x^2 + 1)(x + 1) = z^y$ (*)

Do x, y, z đều nguyên nên từ (*) suy ra $x, y \geq 0$. Đồng thời vì z là số nguyên tố nên

$$\begin{cases} x^2 + 1 = z^a \\ x + 1 = z^b \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{N}; a \geq b \geq 0)$$

Khi đó ta có $x^2 + 1 : x + 1 \Rightarrow (x + 1)(x - 1) + 2 : x + 1$. Dẫn tới

$$2 : (x + 1) \Rightarrow x \in \{0; 1\} \text{ (do } x \geq 0)$$

Với $x = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow z^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$ và z là số nguyên tố bất kỳ

Với $x = 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow z^y = 4 \Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy $(x; y; z) = (1; 2; 2)$ hoặc $(x; y; z) = (0; 0; k)$ với k là số nguyên tố bất kỳ

4) Tìm các số thực x sao cho $x + \sqrt{2022}$ và $\frac{3}{x} - \sqrt{2022}$ đều là các số nguyên

Giả sử $x + \sqrt{2022} = a (a \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = a - \sqrt{2022}$ và

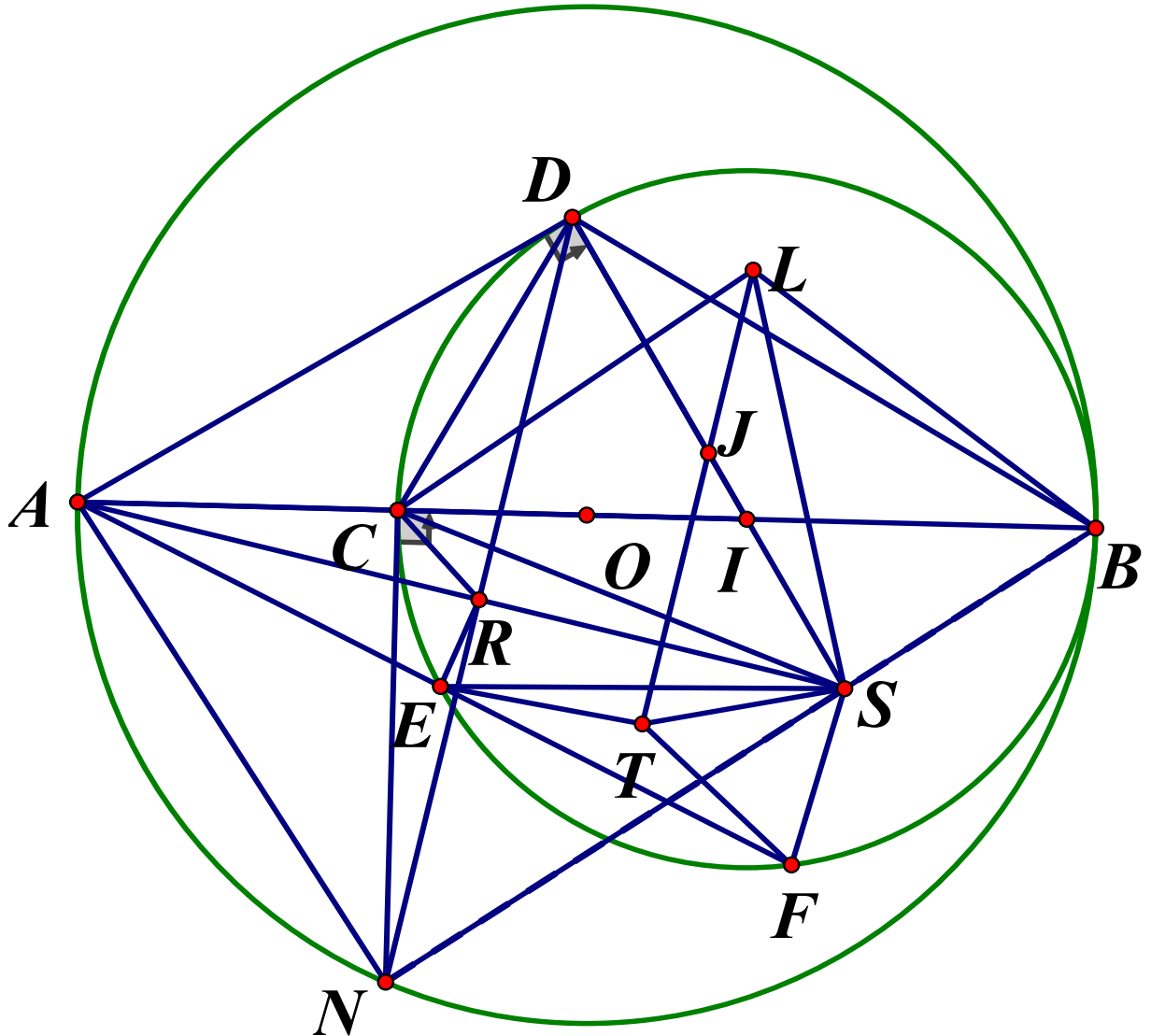
$$\begin{aligned} \frac{3}{x} - \sqrt{2022} &= \frac{3}{a - \sqrt{2022}} - \sqrt{2022} = \frac{3(a + \sqrt{2022})}{a^2 - 2022} - \sqrt{2022} \\ &= \frac{3a}{a^2 - 2022} + \left(\frac{3}{a^2 - 2022} - 1 \right) \cdot \sqrt{2022} \end{aligned}$$

Vì $\frac{3}{x} - \sqrt{2022} \in \mathbb{Z}$ và $a \in \mathbb{Z}$ nên :

$$\begin{cases} \frac{3a}{a^2 - 2022} \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{a^2 - 2022} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm 45 \Rightarrow \begin{cases} x = 45 - \sqrt{2022} \\ x = -45 - \sqrt{2022} \end{cases}$$

Bài số 4. (3,0 điểm)

- 3) Cho đường tròn (O) có đường kính AB . Lấy điểm C thuộc đoạn AO (C khác A, O). Vẽ đường tròn (I) đường kính BC . Vẽ tiếp tuyến AD và cát tuyến AEF với đường tròn (I) (E nằm giữa A và F) sao cho tia AO nằm giữa hai tia AD, AE . Đường thẳng vuông góc với AB vẽ từ C cắt đường tròn (O) tại hai điểm, gọi một trong hai giao điểm đó là N sao cho N và D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB . Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng DI và NB . Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng DN và AS . Gọi J là trung điểm của SD



c) Chứng minh tam giác AND là tam giác cân

Ta có : $\triangle ADC \sim \triangle ABD (g.g) \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB.AC (1)$

Xét $\triangle ANB$ vuông tại N có NC là đường cao nên $AN^2 = AB.AC (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AD^2 = AN^2 \Rightarrow AD = AN \Rightarrow \triangle AND$ cân tại A

d) Gọi L, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$ và $\triangle SEF$. Chứng minh rằng ba điểm J, L, T thẳng hàng

Ta có $\angle ADS = \angle ANS = 90^\circ$ và $\angle ADN = \angle AND$ nên : $\angle ADS - \angle ADN = \angle ANS - \angle AND$

Hay $\angle SDN = \angle SND$

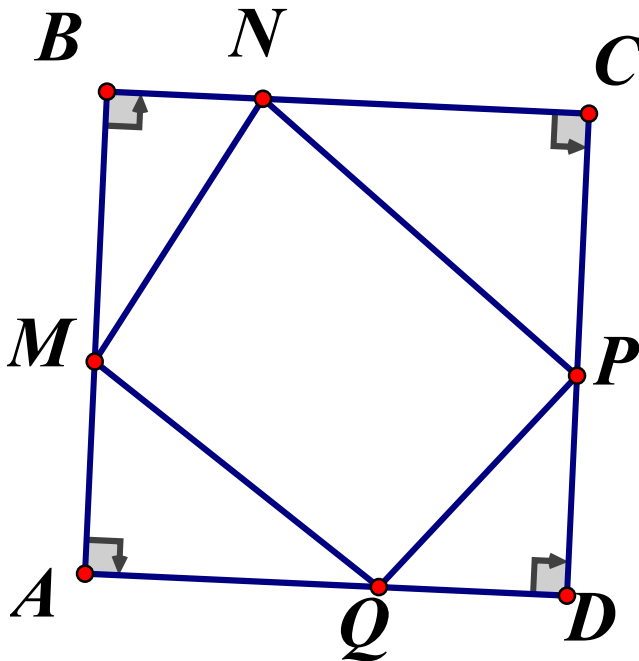
Suy ra $\triangle SDN$ cân tại S hay $SD=SN$. Kết hợp với $AD = AN$ (cmt), suy ra AS là đường trung trực DN . Từ đây, xét $\triangle ADS$ vuông tại D có DR là đường cao nên : $AD^2 = AR.AS$
Mặt khác , dễ dàng chứng minh được $AD^2 = AC.AB = AE.AF$ nên :

$$AR.AS = AC.AB = AE.AF$$

Suy ra các tứ giác $BCRS$ và $EFSR$ nội tiếp. Điều này chứng tỏ các đường tròn tâm L ngoại tiếp $\triangle SBC$ và tâm T ngoại tiếp $\triangle SEF$ cắt nhau tại hai điểm R và S. Do vậy IJ là đường trung trực của đoạn RS

Mặt khác $\triangle DRS$ vuông tại R có RJ là đường trung tuyến nên $JR = JS \Rightarrow J$ thuộc đường trung trực của RS. Kết hợp với kết quả trên suy ra ba điểm L, T, J thẳng hàng

- 4) Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích S. Tứ giác $MNPQ$ có 4 đỉnh M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông đã cho và không trùng với đỉnh của hình vuông. Chứng minh rằng $S \leq AC \cdot \frac{MN + NP + PQ + QM}{4}$**



Gọi độ dài cạnh hình vuông $ABCD$ là x , Khi đó $AC = x\sqrt{2}$ và $S = x^2$. Do đó, điều phải chứng minh tương đương với :

$x^2 \leq x\sqrt{2} \cdot \frac{MN + NP + PQ + QM}{4}$ hay $MN + NP + PQ + QM \geq 2\sqrt{2}x$ (*). Theo Pytago ta có :

$$MN^2 = BM^2 + BN^2 \geq \frac{(BM + BN)^2}{2} \Rightarrow MN \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (BM + BN)$$

Tương tự, ta cũng có :

$$NP \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (CN + CP); PQ \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (DP + DQ); QM \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (AQ + AM)$$

Từ đó suy ra :

$$MN + NP + PQ + QM \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (BM + BN + CN + CP + DP + DQ + AQ + AM) = 2\sqrt{2}x$$

Vậy (*) đúng và ta có điều phải chứng minh.

Bài số 5. (1,5 điểm)

c) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức
$$P = \frac{x^3}{3y+1} + \frac{y^3}{3z+1} + \frac{z^3}{3x+1}$$

Theo $AM - GM$, ta có :

$$x^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3x \Rightarrow 3x + 1 \leq x^3 + 3$$

$$y^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{y^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3y \Rightarrow 3y + 1 \leq y^3 + 3$$

$$z^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{z^3 \cdot 1 \cdot 1} = 3z \Rightarrow 3z + 1 \leq z^3 + 3$$

Do đó :
$$P \geq \frac{x^3}{y^3 + 3} + \frac{y^3}{z^3 + 3} + \frac{z^3}{x^3 + 3}$$

Đặt : $a = x^3; b = y^3, c = z^3$ thì $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 3$, đồng thời

$$P \geq \frac{a}{b+3} + \frac{b}{c+3} + \frac{c}{a+3} = \frac{a^2}{ab+3a} + \frac{b^2}{bc+3b} + \frac{c^2}{ca+3c}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3(a+b+c)} \text{ (cauchy - schwarz) } = \frac{9}{ab+bc+ca+9}$$

Mặt khác , ta có : $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$ nên $P \geq \frac{9}{3+9} = \frac{3}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy $\min P = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

d) Có 10 bạn học sinh tham gia thi đấu bóng bàn. Hai bạn bất kỳ đều phải đấu với nhau một trận, bạn nào cũng phải gặp 9 đối thủ của mình và không có trận đấu hòa. Chứng minh rằng có thể sắp xếp 10 bạn này thành một hàng dọc sao cho bạn đứng trước thắng bạn đứng kề sau

Vì không có trận đấu hòa nên ta luôn xếp được 10 bạn thành một hàng dọc sao cho tồn tại k bạn liên tiếp mà bạn đứng trước thắng bạn đứng kề sau. Rõ ràng $k \geq 2$ và do số cách xếp là hữu hạn nên tồn tại giá trị lớn nhất của k , giả sử là k_0 và ta gọi (k_0) là dãy gồm k_0 bạn trong hàng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta sẽ chứng minh $k_0 = 10$. Giả sử ngược lại, $k_0 < 10$. Khi đó tồn tại bạn A không thuộc dãy (k_0) . Có các khả năng sau xảy ra

- A thắng bạn đứng đầu của dãy (k_0) thì có thể xếp A lên đầu dãy (k_0) và ta có dãy gồm $k_0 + 1$ bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Điều này mâu thuẫn với giả thiết về (k_0)
- A thua bạn đứng cuối của dãy (k_0) thì có thể xếp A vào cuối dãy (k_0) và ta có dãy gồm $k_0 + 1$ bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Điều này mâu thuẫn với giả thiết về (k_0)
- A thắng một số bạn, đồng thời cũng thua một số bạn trong dãy (k_0) . Khi đó, tồn tại hai bạn B, C của dãy (k_0) mà B đứng trên C và trong hai bạn B và C có một bạn thắng và một bạn thua A
+ Nếu A thua B và A thắng C thì xếp A vào giữa B và C ta thu được dãy gồm $k_0 + 1$ bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Điều này mâu thuẫn với giả thiết về (k_0)

+Nếu A thắng B nhưng thua C. Lần lượt xét các bạn đứng phía trên B sẽ xuất hiện 2 khả năng:

*) Tồn tại hai bạn liên tiếp phía trên B(có thể gồm B) mà bạn ở trên thắng A, đồng thời bạn kề dưới thua A. Đến đây, ta lại có thể xếp A vào giữa hai bạn này và dẫn tới mâu thuẫn với giả thiết về (k_0)

*) A thắng tất cả các bạn phía trên B. Khi đó, ta lại có thể xếp A lên đầu và cũng dẫn tới mâu thuẫn với giả thiết về k_0

Tóm lại, giả sử là sai và bài toán được chứng minh.