

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
LÀO CAI

NĂM HỌC 2023 – 2024

Vòng 1 – Môn thi: Toán

Ngày thi: 22/9/2023

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

(Đề thi gồm: 05 câu, 01 trang)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (4,0 điểm). Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ (n+1)u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n) + 2\left(u_{n+1} + \frac{u_n}{n}\right) + 3u_n \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 2 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$, đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai là P . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm M . Đường thẳng EF cắt đường thẳng PI tại điểm H .

a) Chứng minh rằng $MP \perp PD$.

b) Chứng minh rằng các điểm M, P, H, D cùng thuộc một đường tròn.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho bảng ô vuông $n \times n$ với n là số nguyên lớn hơn 3, mỗi ô vuông của bảng được điền số 1 hoặc số -1 .

a) Có bao nhiêu cách điền để tích các số trên mỗi hàng và tích các số trên mỗi cột đều bằng 1.

b) Có bao nhiêu cách điền để tổng các số trong mỗi bảng ô vuông 2×2 đều bằng 0.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(9f(x^2) - 22f(y) + 2023y) = 9x^2 + 2001f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng không tồn tại số thực m để $f(x) > m, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng f là toàn ánh.

Câu 5 (3,0 điểm). Giả sử tồn tại số nguyên tố p và các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k = y^{11} - 1. \text{ Chứng minh rằng } p < 90.$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của CBCT 1 Chữ kí của CBCT 2

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)
(Đáp án gồm có 04 trang, 05 câu)

I. Hướng dẫn chung

1. Cán bộ chấm thi chấm đúng như đáp án - thang điểm.
2. Nếu có câu nào, ý nào mà thí sinh có cách giải khác so với đáp án nhưng vẫn đúng thì vẫn cho điểm tối đa của câu, ý đó theo thang điểm.
3. Nếu câu 2 thí sinh không vẽ hình thì không cho điểm. Học sinh vẽ hình sai bắt đầu từ nội dung nào thì không tính điểm từ nội dung đó.

II. Đáp án - thang điểm

Câu 1 (4,0 điểm). Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ (n+1)u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n) + 2\left(u_{n+1} + \frac{u_n}{n}\right) + 3u_n \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

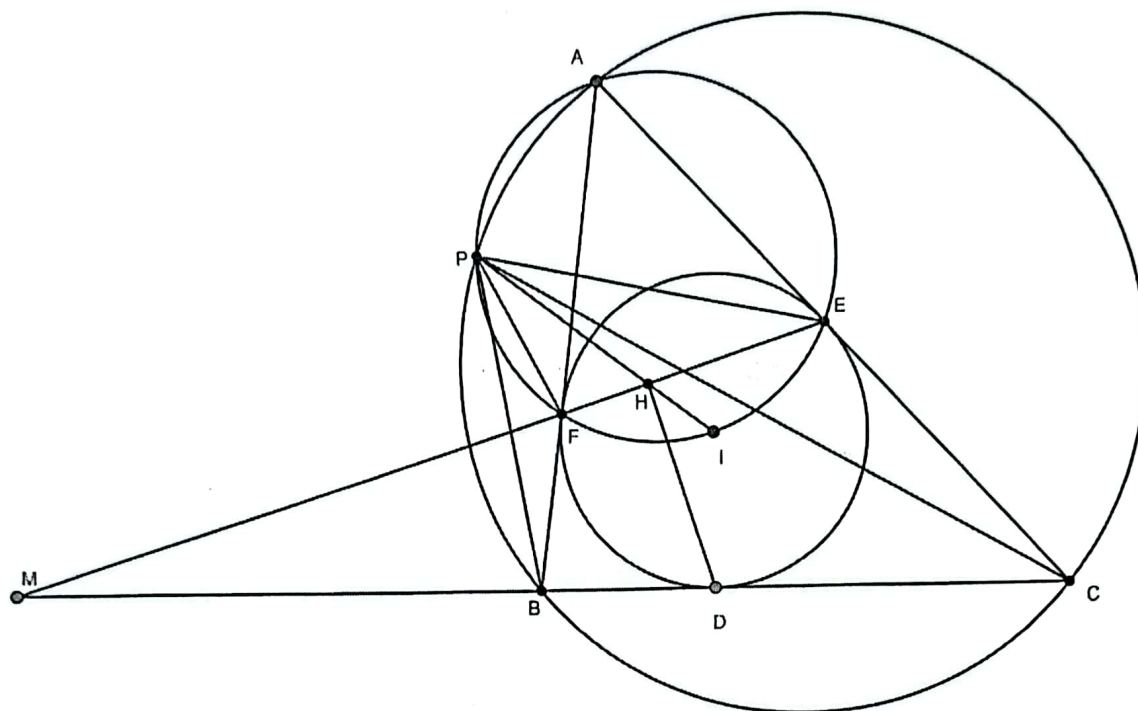
Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Nội dung	Điểm
Từ công thức truy hồi của dãy ta được: $(n+1)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} + \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n}\right)u_n \Leftrightarrow (n+1)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1} + \frac{(n+1)(n+2)}{n}u_n$	1,0
$\Leftrightarrow \frac{u_{n+2}}{n+2} = \frac{u_{n+1}}{n+1} + \frac{u_n}{n}$	1,0
Đặt $a_n = \frac{u_n}{n}$, khi đó ta được: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n = 1, 2, \dots$	1,0
Dãy (a_n) là dãy Fibonacci nên $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$ Do đó $u_n = \frac{n}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$	1,0

Câu 2 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$, đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm thứ hai là P . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm M . Đường thẳng EF cắt đường thẳng PI tại điểm H .

a) Chứng minh rằng $MP \perp PD$.

b) Chứng minh rằng các điểm M, P, H, D cùng thuộc một đường tròn.



Ý	Nội dung	Điểm
a	Vì $\widehat{PFA} = \widehat{PEA}$ nên $\widehat{PFB} = \widehat{PEC}$, lại có $\widehat{PBF} = \widehat{PCE}$ nên $\triangle PFB \sim \triangle PEC$.	1,0
	Do đó $\frac{PB}{PC} = \frac{PF}{PE} = \frac{BF}{CE}$ lại có $\frac{BF}{CE} = \frac{BD}{DC}$. Suy ra PD là phân giác góc $\widehat{BPC}$.	1,0
	Vì $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$, theo định lý Ceva suy AD, BE, CF đồng quy, do đó $(M, D, B, C) = -1$. Do đó $MP \perp PD$.	1,0
b	Ta có $\widehat{AEI} = \widehat{AFI} = 90^\circ$ và $IE = IF$ nên I là điểm chính giữa cung EF của đường tròn (AEF) . Nên PH là phân giác góc $\widehat{FPE}$ suy ra $\frac{PF}{PE} = \frac{HF}{HE}$.	1,0
	Suy ra $\frac{HF}{HE} = \frac{BF}{CE}$, lại có $\widehat{BFH} = \widehat{CEH}$ (do tam giác AEF cân tại A). Do đó $\triangle BFH \sim \triangle CEH$ nên $\frac{HB}{HC} = \frac{BF}{CE}$ suy ra $\frac{HB}{HC} = \frac{BD}{CD}$ hay HD là phân giác góc $\widehat{BHC}$. Kết hợp với $(M, D, B, C) = -1$ suy ra $MH \perp HD$. Kết hợp với phần a) ta có H, P thuộc đường tròn đường kính MD .	1,0

Câu 3 (5,0 điểm). Cho bảng ô vuông $n \times n$ với n là số nguyên lớn hơn 3, mỗi ô vuông của bảng được điền số 1 hoặc số -1 .

a) Có bao nhiêu cách điền để tích các số trên mỗi hàng và tích các số trên mỗi cột đều bằng 1.

Nội dung						Điểm
					D_1	
					D_2	
					D_3	
					...	
					D_{n-1}	
C_1	C_2	C_3	...	C_{n-1}	M	
Bước 1: Với bảng $(n-1) \times (n-1)$ ở góc trên bên trái, ta điền tùy ý nên có $2^{(n-1)^2}$ cách;						1,0
Bước 2: Các ô $C_1, \dots, C_{n-1}$ phải được điền bởi tích các số còn lại trên cột của nó. Các ô $D_1, \dots, D_{n-1}$ phải được điền bởi tích các số còn lại trên hàng của nó.						1,0
Bước 3: Chú ý tích các số còn lại trên hàng chứa M bằng tích các số còn lại trên cột chứa M , vì cùng bằng tích tất cả các số trên bảng $(n-1) \times (n-1)$ ở bước 1. Nên ô M phải được điền bởi tích các số còn lại trên hàng (hoặc trên cột) của nó. Vậy đáp số bài toán là $2^{(n-1)^2}$ cách.						1,0

b) Có bao nhiêu cách điền để tổng các số trong mỗi bảng ô vuông 2×2 đều bằng 0.

Nội dung						Điểm
+	-					
-						
+	-	+	-	+	-	
+	-	+	-	+	-	
-	+	-	+			
+						
TH1: Đầu tiên ta điền ngẫu nhiên cột 1, sao cho trong cột có ít nhất 2 ô liên nhau được điền giống nhau. Khi đó 2 hàng chứa 2 ô này sẽ phải được điền tự động theo quy luật đan xen dấu các ô trên mỗi hàng. Sau đó các hàng kề với 2 hàng này sẽ được điền tự động theo quy luật đan xen dấu các ô trên mỗi hàng. Cứ tiếp tục như vậy ta sẽ điền hết được cả bảng. Trường hợp này có $2^n - 2$ cách điền.						1,0
TH2: Các ô của cột 1 được điền quy luật đan xen dấu. Khi đó các cột còn lại cũng phải điền theo quy luật đan xen dấu các ô trên mỗi cột. Nhưng trên mỗi cột lại có 2 kiểu đan xen dấu (tùy thuộc vào ô đầu tiên của cột là 1 hay -1). Vậy trường hợp này có 2^n cách điền.						0,75
Vậy đáp số bài toán là: $2^n - 2 + 2^n = 2^{n+1} - 2$ cách.						0,25

Câu 4 (3,0 điểm). Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(9f(x^2) - 22f(y) + 2023y) = 9x^2 + 2001f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng không tồn tại số thực m để $f(x) > m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nội dung	Điểm
Giả sử tồn tại m sao cho $f(x) > m, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, do $f(x)$ đồng biến nên tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho $c = \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y)$.	0,5
Ta có $\lim_{y \rightarrow -\infty} (9f(x^2) - 22f(y) + 2023y) = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(9f(x^2) - 22f(y) + 2023y) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$	0,5
Lại có $\lim_{y \rightarrow -\infty} (9x^2 + 2001f(y)) = 9x^2 + 2001c, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $9x^2 + 2001c = c, \forall x \in \mathbb{R}$ Điều này là vô lí.	0,5

b) Chứng minh rằng f là toàn ánh.

Nội dung	Điểm
Với $t \in \mathbb{R}$, do $f(x)$ không bị chặn dưới nên tồn tại a để $f(a) < \frac{t}{2001}$,	0,5
Chọn $b = \frac{1}{3}\sqrt{t - 2001f(a)}$ thì $9b^2 = t - 2001f(a)$.	0,5
Khi đó $f(9f(b^2) - 22f(a) + 2023a) = 9b^2 + 2001f(a) = t$.	0,5

Câu 5 (3,0 điểm). Giả sử tồn tại số nguyên tố p và các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{p-1} x^k = y^{11} - 1. \text{ Chứng minh rằng } p < 90.$$

Nội dung	Điểm
Ta thấy $y \geq 2$. Gọi q là một ước nguyên tố bất kì của $y^{11} - 1$, suy ra $q \mid x^p - 1$. Gọi $h = \text{ord}_q(x)$ thì $h \mid p$. Nếu $h = 1$ thì $x \equiv 1 \pmod{q}$, suy ra $x^{p-1} + \dots + x + 1 \equiv p \pmod{q}$ nên $q \equiv 0 \pmod{p}$. Nếu $h = p$, theo định lý Fermat $x^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ nên $p \mid q - 1$ hay $q \equiv 1 \pmod{p}$.	1,0
Từ đó suy ra mọi ước $y^{11} - 1$ đều đồng dư với 0 hoặc 1 $\pmod{p}$. Nên $y - 1 \equiv 0$ hoặc $1 \pmod{p}$; và $y^{10} + \dots + y + 1 \equiv 0$ hoặc $1 \pmod{p}$;	1,0
TH1: $y - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ thì $y \equiv 1 \pmod{p}$ nên $y^{10} + \dots + y + 1 \equiv 11 \pmod{p}$. Nên $11 \equiv 0$ hoặc $1 \pmod{p}$ tức là $p \in \{2; 5; 11\}$. TH2: $y - 1 \equiv 1 \pmod{p}$ thì $y \equiv 2 \pmod{p}$ nên $y^{10} + \dots + y + 1 \equiv 2^{11} - 1 \equiv 2047 \pmod{p}$. Nên $2047 \equiv 0$ hoặc $1 \pmod{p}$ tức là $p \in \{2; 3; 31; 11; 23; 89\}$. Vậy $p < 90$.	1,0

-----Hết-----