

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi: 20/9/2023

Bài 5. (6,0 điểm) . Tìm tất cả các hàm số $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho f đơn điệu và

$$\left[f(x) + f(y) \right]^2 = f(x^2 - y^2) + f(2xy) \text{ với mọi } x \geq y \geq 0.$$

Bài 6. (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC không cân ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB .

a) Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của ID với EF , IE với FD , AX với BY ; N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác ZBC, ZCA, ZAB . Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác $N_a N_b N_c$ thuộc đường thẳng Euler của tam giác ABC .

b) Gọi M là trung điểm BC và L là giao điểm của AD với EF . Trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $\frac{PB}{PC} = \frac{LF}{LE}$. Đường thẳng qua M song song với AI cắt trung trực của MP tại K . Chứng minh rằng đường tròn tâm K đi qua M và P tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC .

Bài 7. (7,0 điểm)

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ ta xác định các dãy số nguyên dương (a_n) và (b_n) như sau

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \text{ với } (a_n, b_n) = 1, \text{ trong đó } (a, b) \text{ là kí hiệu ước chung lớn nhất}$$

của hai số nguyên a, b . Chứng minh rằng với $\forall N, T \in \mathbb{N}^*$ luôn tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ để với mọi $k = m + i, (i \in \{0; 1; \dots; T\})$ ta đều có $(a_k, N) = 1$.

--- HẾT ---

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....