

Môn: TOÁN HỌC

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: 12/09/2024

(Đề thi gồm 01 trang, gồm 03 bài)

Câu 5. Cho tam giác ABC đường nội tiếp (O) , các đường phân giác AD, BE, CF . Tiếp tuyến tại A cắt tuyến tuyến tại B, C của (O) lần lượt tại M, N . Gọi X, Y lần lượt là trung điểm DE, DF . Chứng minh rằng MX, NY, AD đồng quy.

Câu 6. Cho đa thức $P(x)$ monic, bậc nhỏ hơn p thoả mãn với mọi số tự nhiên $d \leq p-1$,

$$\sum_{i=1}^p (P(i+d) - P(i))^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

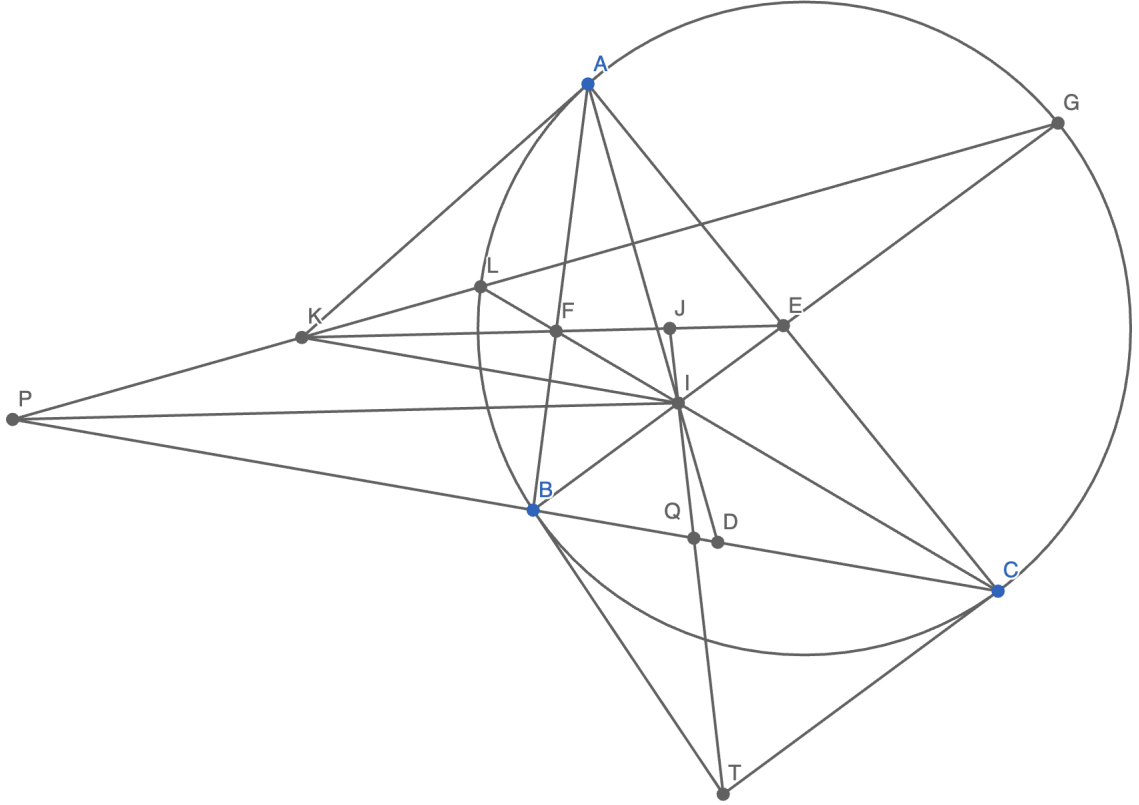
Chứng minh rằng $\deg P \leq \frac{p-1}{2}$.

Câu 7. Cho $n \geq 8$ thành phố và một số chuyến bay hai chiều giữa 2 trong n thành phố đó. Hai thành phố A, B được gọi là *kết nối* nếu có chuyến bay hai chiều giữa A và B . Nhóm 8 thành phố mà 2 thành phố bất kỳ đôi một *kết nối* được gọi là *sum vầy*. Người ta nhận thấy rằng nếu mở thêm một chuyến bay hai chiều giữa hai thành phố bất chưa được *kết nối* thì số nhóm thành phố *sum vầy* tăng lên. Tìm số nhỏ nhất các cặp thành phố *kết nối* của n thành phố này.

—————Hết—————

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN NGÀY 2



Câu 5.

Gọi I là giao điểm BE, CF . Gọi T là giao điểm tiếp tuyến tại B, C của (O) . Gọi J là trung điểm EF . Ta sẽ chứng minh I, T, J thẳng hàng.

Gọi Q là giao điểm của IJ và BC , G, L lần lượt là giao điểm của BE, CF với (O) . Gọi P, K lần lượt là giao điểm của GL với BC, EF .

Áp dụng định lý Pascal cho bộ $(\begin{smallmatrix} A, G, C \\ L, A, B \end{smallmatrix}) \Rightarrow E, F, K$ thẳng hàng.

Do GL là trung trực AI nên $KA = KI$

$\Rightarrow (IK, IA) = (AI, AK) = (AI, AB) + (AB, AK) = (AC, AI) + (CB, CA) = (DB, DA) \pmod{\pi} \Rightarrow IK \parallel BC$.

Dễ thấy $GI^2 = GA^2 = GE \cdot GB$. Vì $IK \parallel BC \Rightarrow \frac{GK}{GP} = \frac{GI}{GB} = \frac{GE}{BI} \Rightarrow IP \parallel EF$.

Suy ra $I(PQBC) = I(PJEF) = -1 \Rightarrow P, Q$ liên hợp đối với (O) . Mà I, P liên hợp và I, T cũng liên hợp đối với (O) nên I, T, Q thẳng hàng hay I, J, T thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có M, X, I thẳng hàng, N, Y, I thẳng hàng.

Vậy MX, NY, AD đồng quy.

Câu 6. Đầu tiên, ta chứng minh với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ thì $\sum_{i=1}^p i^k \not\equiv 0 \pmod{p} \forall k \not\equiv p-1$ và $\sum_{i=1}^p i^k \equiv -1 \pmod{p}$

với mọi $k \not\equiv p-1$.

Thật vậy, do p là số nguyên tố nên tồn tại c là căn nguyên thủy $\pmod{p}$. Ta có $\{1, 2, \dots, p\}$ và

$\{c, 2c, \dots, cp\}$ là các HDD mod p nên

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^p (ci)^k &\equiv \sum_{i=1}^p i^k \pmod{p} \\ \Rightarrow (c^k - 1) \sum_{i=1}^p i^k &\equiv 0 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Vì c là căn nguyên thủy mod p , $k \not\equiv p-1$ nên $c^k - 1 \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow \sum_{i=1}^p i^k \equiv 0 \pmod{p}$, đpcm.

Từ nhận xét trên, ta suy ra với mỗi đa thức $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f < 2p-2$ thì $\sum_{i=1}^p f(i):p \Leftrightarrow$ hệ số của x^{p-1} chia hết cho p .

Giả sử $p-1 \geq k = \deg P > \frac{p-1}{2}$. Đặt $P(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ trong đó $a_k = 1, a_i \in \mathbb{Z} \forall i = \overline{0, k}$.

Với mỗi $d \leq p-1$, đặt

$$\begin{aligned}Q_d(x) &= (P(x+d) - P(x))^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^k a_i \sum_{u=0}^{i-1} C_i^u x^u d^{i-u} \right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^k a_i a_j \sum_{u=0}^{i-1} \sum_{v=0}^{j-1} C_i^u C_j^v x^{u+v} d^{i+j-u-v}.\end{aligned}$$

Do $p-1 \geq \deg P > \frac{p-1}{2}$ nên $2p-2 > \deg Q_d \geq p-1$.

Theo giả thiết, ta có $\sum_{i=1}^p Q_d(i) \equiv 0 \pmod{p}$ nên hệ số của x^{p-1} trong $Q_d(x)$ chia hết cho p .

Xét đa thức hệ số nguyên f :

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^k a_i a_j \sum_{u+v=p-1, u < i, v < j} C_i^u C_j^v x^{i+j-p+1}.$$

Khi đó, $f(d)$ là hệ số của x^{p-1} trong $Q_d(x)$. Ta có: $\deg f \leq 2k - p + 1 \leq p-1$ và $f(d):p$ với mọi $d = \overline{1, p-1}$ nên tất cả hệ số của f đều chia hết cho p .

Mặt khác, hệ số cao nhất của f bằng:

$$\sum_{u+v=p-1, u, v < k} C_k^u C_k^v = C_{2k}^{p-1} - 2C_k^{p-1-k}.$$

Vì $2k > p-1$ nên $C_{2k}^{p-1}:p$. Vì $k < p$ nên $2C_k^{p-1-k} \not\equiv p$. Do đó $C_{2k}^{p-1} - 2C_k^{p-1-k} \not\equiv p$, mâu thuẫn.

Vậy $\deg P \leq \frac{p-1}{2}$.

Câu 7. Đầu tiên, ta xét bổ đề sau: Xét $(A_i, B_i)_{i=1}^k$ là họ các tập hữu hạn thỏa mãn $|A_i| = m, |B_i| = n, A_i \cap B_i = \emptyset, A_i \cap B_j \neq \emptyset$ với mọi $i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$. Khi đó $k \leq C_{m+n}^m$.

Chứng minh. Gọi $S = \bigcup_{i=1}^k (A_i \cup B_i)$. Sắp xếp ngẫu nhiên các phần tử của S thành hàng ngang.

Với mỗi $1 \leq i \leq k$, gọi X_i là sự kiện tất cả các phần tử của A_i xếp trước các phần tử của B_i .

Khi đó, $\mathbb{P}(X_i) = \frac{1}{C_{m+n}^m}$.

Mặt khác, với mọi $i \neq j$ thì $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Thật vậy, giả sử tồn tại một cách sắp xếp các phần tử của S sao cho tồn tại $i \neq j$ mà tất cả các phần tử của A_i xếp trước tất cả các phần tử của B_i và tất cả các phần tử của A_j xếp trước tất cả các phần tử của B_j .

Theo giả thiết, tồn tại $x \in A_i \cap B_j, y \in A_j \cap B_i$. Dễ thấy $x \neq y$ do $A_i \cap B_i = \emptyset$.

Do $x \in A_i, y \in B_i$ nên x đứng trước y .

Do $x \in B_j, y \in A_j$ nên y đứng trước x , mâu thuẫn.

Vậy với mọi $i \neq j$ thì $X_i \cap X_j = \emptyset$. Khi đó,

$$1 \geq \mathbb{P} \left[\bigcup_{i=1}^k X_i \right] = \sum_{i=1}^k \mathbb{P}[X_i] = \frac{k}{C_{m+n}^m}.$$

Suy ra $k \leq C_{m+n}^m$.

Quay lại bài toán. Xét $G = (V, E)$ là đồ thị có các đỉnh tương ứng với các thành phố; hai đỉnh được nối với nhau nếu hai thành phố tương ứng *kết nối*.

Xét $A_1, A_2, \dots, A_k$ là tất cả các tập con của V chứa 2 đỉnh không được nối với nhau trong G .

Theo bài ra ta có, với mỗi $i = \overline{1, k}$, tồn tại C_i là tập gồm 6 đỉnh của $G, A_i \cap C_i = \emptyset$ sao cho khi nối 2 đỉnh thuộc A_i thì cùng với 6 đỉnh thuộc C_i , ta được đồ thị 8 đỉnh đầy đủ K_8 .

Xét $B_i = V \setminus (A_i \cup C_i)$. Khi đó $|B_i| = n - 8$ với mọi $i = \overline{1, k}$.

Ta chứng minh $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ với mọi $i \neq j$. Thật vậy, giả sử $A_1 \cap B_2 = \emptyset$. Khi đó, $A_1 \subset A_2 \cap C_2$.

Do vậy, trong 8 đỉnh thuộc $A_2 \cap C_2$, có ít nhất 2 cặp đỉnh chưa được nối (là A_1 và A_2), mâu thuẫn với định nghĩa C_2 .

Vậy $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ với mọi $i \neq j$.

Áp dụng bổ đề, ta được $k \leq C_{n-6}^2 = \frac{(n-7)(n-6)}{2}$. Suy ra $|E| \geq 6n - 21$.

Ngược lại, xét đồ thị G gồm n đỉnh, trong đó có 6 đỉnh đôi một nối với nhau, tạo thành K_6 , $n - 6$ đỉnh còn lại được nối với 6 đỉnh đó và không có hai đỉnh nào trong $n - 6$ đỉnh này nối với nhau.

Dễ thấy đồ thị G thỏa mãn yêu cầu bài toán và số cạnh của G là

$$C_6^2 + 6(n - 6) = 6n - 21.$$

Vậy số cặp thành phố *kết nối* nhỏ nhất là $6n - 21$.