

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN HÀ TĨNH
HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2020 – 2021

MÔN: TOÁN (chuyên)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (1,5 điểm) Giả sử a, b, c là các số thực khác 0 sao cho hệ phương trình
$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$

có nghiệm $(x; y)$. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - 2x^2y = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 2y = 2 \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $2(x-2)\sqrt{x+2} = -x^2 + 3x + 3$

Câu 3. (2,5 điểm)

a) Tồn tại hay không số nguyên dương n sao cho $2n + 2021$ và $3n + 2020$ đều là các số chính phương

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $\frac{x^2 - 2}{xy + 2}$ có giá trị là số nguyên

Câu 4. (2,5 điểm) Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho hai tâm O và O' nằm khác phía đối với đường thẳng AB . Đường thẳng d thay đổi đi qua B cắt các đường tròn (O) và (O') lần lượt tại C và D (d không trùng với đường thẳng AB)

a) Xác định vị trí của đường thẳng d sao cho đoạn thẳng CD có độ dài lớn nhất

b) Gọi M là điểm di chuyển từ điểm A , ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn

(O) ; N là điểm di chuyển từ điểm A , cùng chiều kim đồng hồ trên đường tròn (O')

sao cho $\angle AOM$ luôn bằng $\angle AON$. Chứng minh đường trung trực của MN luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2z^2 + y^2z^2 + 1 \leq 3z$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{8}{(y+3)^2} + \frac{4z^2}{(1+2z)^2}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

Ta cần chứng minh $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} = 3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc (*)$

Từ hệ phương trình ta có $(a+b+c)(x+y-1)=0$

Th1: $a+b+c=0 \Leftrightarrow a=-(b+c) \Leftrightarrow a^3 = -b^3 - 3bc(b+c) - c^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Th2: $x+y-1=0 \Leftrightarrow x=1-y$ thay vào phương trình $ax+by=c$ được $y(a-b)=a-c$

-Xét $a-b=0 \Leftrightarrow a=b$ thay vào phương trình $bx+cy=a$ được $cy=b(1-x)=by$

Nếu $y=0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow a=c$, nếu $y \neq 0 \Rightarrow c=b$. Do đó $a=b=c(tm(*))$

Xét $a-b \neq 0 \Rightarrow y = \frac{a-c}{a-b} \Rightarrow x = \frac{c-b}{a-b}$ thay vào phương trình $bx+cy=a$ ta có:

$$\frac{b(c-b)}{a-b} + \frac{c(a-c)}{a-b} = a \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 (ktm \text{ do } a-b \neq 0)$$

Vậy khi hệ phương trình có các nghiệm $(x; y)$ thì $a+b+c=0$ hoặc $a=b=c$ thỏa mãn (*)

Câu 2.

a) Cộng vế theo vế các phương trình của hệ được $x^4 - 2x^2y + 2x^2 + y^2 - 2y = 3$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^2 + 1 - 2x^2y + 2x^2 - 2y = 4 \Leftrightarrow (x^2 - y + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y + 1 = 2 \\ x^2 - y + 1 = -2 \end{cases}$$

Xét $x^2 - y + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = y + 1$ thế vào phương trình $2x^2 + y^2 - 2y = 2$ được

$$y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ thỏa mãn phương trình } x^4 - 2x^2y = 1$$

Xét $x^2 - y + 1 = -2 \Leftrightarrow x^2 = y - 1$ thế vào phương trình $2x^2 + y^2 - 2y = 2$ được

$$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$\begin{cases} y = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 (k \text{ tm } x^4 - 2x^2y = 1) \\ y = -2 \Rightarrow x^2 = -3 (k \text{ tm}) \end{cases}$$

Vậy $(x; y) \in \{(-1; 0); (1; 0)\}$

b) ĐKXD: $x \geq -2$. Ta có phương trình $2(x-2)\sqrt{x+2} + x^2 - 3x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 2(x-2)\sqrt{x+2} + x+2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x-2+\sqrt{x+2})^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2+\sqrt{x+2} = 3 \\ x-2+\sqrt{x+2} = -3 \end{cases}$$

$$*) x-2+\sqrt{x+2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ x+2 = (5-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{11+\sqrt{29}}{2} (k \text{ tm}) \\ x_2 = \frac{11-\sqrt{29}}{2} (t \text{ m}) \end{cases}$$

$$*) x-2+\sqrt{x+2} = -3 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = -x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ x+2 = (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} (k \text{ tm}) \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} (t \text{ m}) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{11-\sqrt{29}}{2}; x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Câu 3.

a) Giả sử $2n + 2021$ và $3n + 2020$ đều là số chính phương.

$$\text{Đặt } \begin{cases} 2n + 2021 = (2a+1)^2 \\ 3n + 2020 = (2b)^2 \end{cases} \text{ với } a, b \text{ là các số nguyên.}$$

Ta có: $3n = (4b^2 - 2020); 4 \Rightarrow 3n:4 \Rightarrow n:4$

Mặt khác $2n + 2021 = (2a+1)^2 \Leftrightarrow 2020 = 4a(a+1) - 2n:8$ (vô lý).

Vậy không tồn tại n thỏa mãn.

b) Giả sử $\frac{x^2 - 2}{xy + 2}$ là số nguyên, ta có: $(x^2 - 2) : (xy + 2) \Leftrightarrow y(x^2 - 2) : (xy + 2)$

$$\Leftrightarrow [x(xy + 2) - 2(x + y)] : (xy + 2) \Rightarrow 2(x + y) : (xy + 2)$$

Do đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $2(x + y) = k(xy + 2)$ (*)

Nếu $k \geq 2$ thì từ (*) ta có: $x + y \geq xy + 2 \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) + 1 \leq 0$, mâu thuẫn

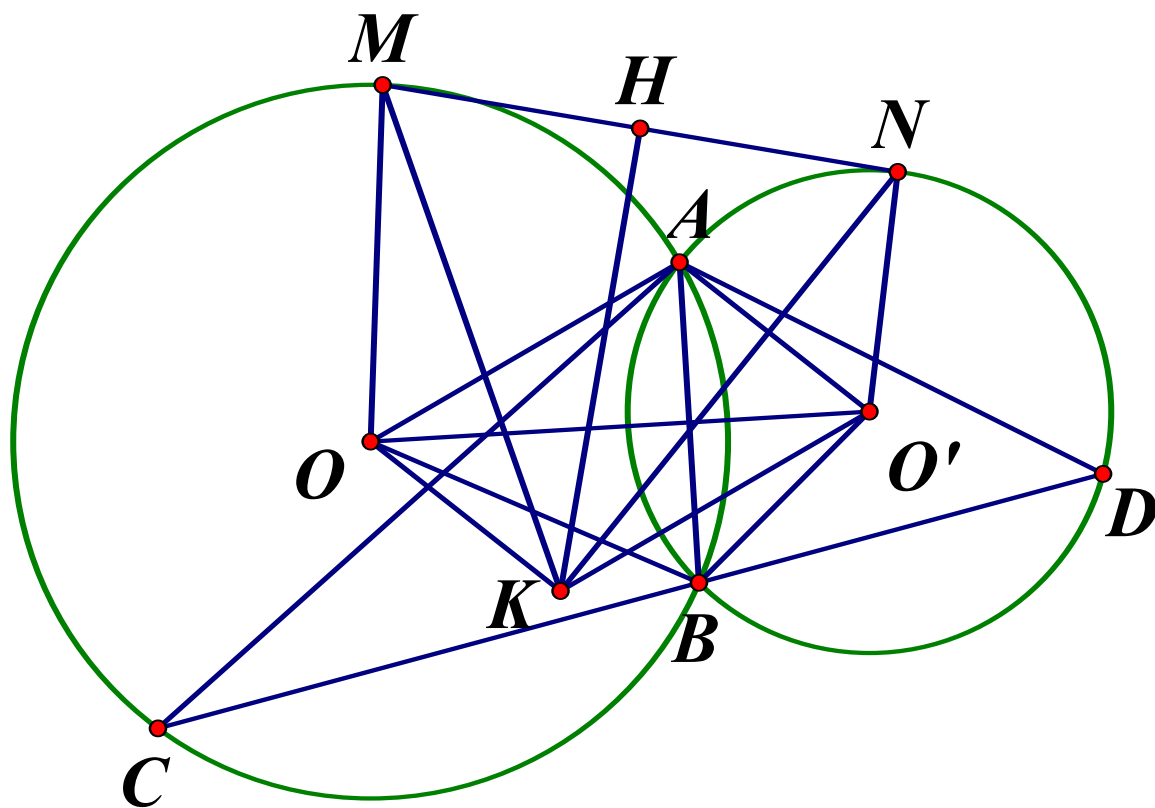
Do vậy $k = 1$. Từ (*) ta có: $2(x + y) = xy + 2 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) = 2$

Do $x \geq 1 \Rightarrow x - 2 \geq -1$ và $y \geq 1 \Rightarrow y - 2 \geq -1$ nên ta có các trường hợp sau:

$$TH1: \begin{cases} x - 2 = 1 \\ y - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad TH2: \begin{cases} x - 2 = 2 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Kiểm tra lại ta có $x = 4, y = 3$ thỏa đề

Câu 4.



a) Ta có AB là đường trung trực của OO'

Do đó $\angle AOO' = \frac{1}{2} \angle AOB = \angle ACB$ và $\angle AO'O = \frac{1}{2} \angle AO'B = \angle ADB$

$\Rightarrow \Delta AOO' \sim \Delta ACD (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{OO'}{CD} = \frac{AO'}{AD} \Rightarrow CD = \frac{AC \cdot OO'}{AO}$$

CD lớn nhất khi AC lớn nhất, khi đó AC là đường kính của đường tròn (O) và AD là đường kính của đường tròn (O')

b) Vẽ hình bình hành $AOKO'$. Ta có:

$$\angle MOK = \angle MOA + \angle AOK = \angle NO'A + \angle AO'K = \angle NO'K$$

Và $MO = OA = KO'$; $OK = AO' = NO' \Rightarrow \Delta MOK = \Delta KO'N \Rightarrow MK = NK$

Vì A, O, O' cố định nên K cố định.

Vậy đường trung trực của MN luôn đi qua điểm K cố định

Câu 5.

Từ giả thiết ta có :

$$6z \geq 2x^2z^2 + 2y^2z^2 + 2 = 2\left(x^2z^2 + \frac{1}{4}\right) + 2\left(y^2z^2 + \frac{1}{4}\right) + 1 \geq 2xz + 2yz + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2xz + 2yz + 1}{2z} \leq 3 \text{ (bất đẳng thức Cô si).}$$

Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(y+3)^2} + \frac{4}{(y+3)^2} + \frac{4z^2}{(1+2z)^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{y+3} + \frac{2z}{1+2z} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+3} + \frac{2}{y+3} + \frac{2z}{1+2z} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+3} + \frac{1}{\frac{1}{2z} + 1} \right)^2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki mở rộng ta có:

$$P \geq \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{(1+2+1)^2}{x+1+y+3+\frac{1}{2z}+1} \right] = \frac{64}{\left(\frac{2xz+2yz+1}{2z} + 5 \right)^2} \geq \frac{64}{8^2} = 1$$

$$\text{Vậy } \textit{Min}P = 1 \Leftrightarrow x = y = 1; z = \frac{1}{2}$$