

**Bài 1.** 1) Cho biểu thức  $P = \sqrt{2a + 6\sqrt{2a - 9}} + \sqrt{2b - 6\sqrt{2b - 9}}$ , trong đó  $a, b$  là các số thực thỏa mãn  $a \geq \frac{9}{2}; b \geq 9$ .

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tính giá trị biểu thức  $P$  khi  $a = \frac{1}{2}(13 + 2\sqrt{3})$ ;  $b = 8 + 2\sqrt{3}$ .

2) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - 2y\sqrt{x-1} = 2x - 6y \end{cases}$$

**Bài 2.** Cho đa thức  $Q(x) = x^2 - ax + b$ , trong đó  $a, b$  là các số nguyên. Biết rằng tồn tại ba số nguyên phân biệt  $m, n, p$  với  $1 \leq m, n, p \leq 9$  sao cho  $Q(m) = Q(n) = -3$  và  $Q(p) = 11$ .

a) Chứng minh rằng  $(m-p)(n-p) = 14$ .

b) Tìm tất cả các cặp  $(a; b)$  thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

2) Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 2024$ .

Chứng minh rằng 
$$\frac{a}{a + \sqrt{2024a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2024b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2024c + ab}} \leq 1$$

**Bài 3.** a) Tìm tất cả các cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn  $(x^2 - 4)^2 = 3y^4 + 12y^2 + 25 + 2x^2y^2$ , trong đó  $x$  là số nguyên,  $y$  là số nguyên tố.

b) Cho  $x, y$  là hai số tự nhiên thỏa mãn  $x > y > 0$ . Chứng minh rằng nếu  $x^3 - y^3$  chia hết cho 3 thì  $x^3 - y^3$  chia hết cho 9.

**Bài 4.** 1) Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh 2. Đường tròn tâm  $O$  bán kính 1 tiếp xúc với  $BC$  tại trung điểm của  $BC$ .  $M$  là điểm di động trên đường tròn  $(O)$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $AM$ .

2) Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn tâm  $O$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Tia  $AI$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $D$ .

a) Chứng minh rằng tam giác  $IDB$  cân và  $D$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $IBC$ .

b) Đường thẳng  $OD$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $E$  ( $E$  khác  $D$ ) và cắt cạnh  $BC$  tại điểm  $F$ .

Chứng minh rằng  $ID \cdot IE = IF \cdot DE$ .

c) Gọi  $x, y, z$  lần lượt là khoảng cách từ điểm  $O$  đến các cạnh  $BC, CA, AB$ ;  $R, r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $x + y + z = R + r$ .

**Bài 5.** 1) Cho bảng ô vuông  $3 \times 3$  (gồm ba dòng và ba cột). Người ta ghi tất cả các số thuộc tập hợp  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; n\}$  với  $n \in \mathbb{N}; n > 8$  vào các ô của bảng, mỗi ô vuông ghi một số sao cho tổng các số trên mỗi dòng đều bằng nhau.

a) Hãy chỉ ra một cách ghi các số vào bảng thỏa mãn yêu cầu của bài toán khi  $n = 9$ .

b) Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  thỏa mãn bài toán.

2) Mỗi điểm trên mặt phẳng đều được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác đều có ba đỉnh được tô cùng màu.