

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC GIANG
BẮC GIANG

NĂM HỌC 2021 - 2022

MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 29/7/2021

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I (5,0 điểm).

1) Cho biểu thức $A = \left(\frac{8x\sqrt{x}-1}{2x-\sqrt{x}} - \frac{8x\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1}$ với $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq \frac{1}{4}$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để A là số chính phương.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(2m-1)x + m^2 + m - 3 = 0$ có

hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $B = \frac{x_1 + x_2 + 1}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2 + x_1x_2) + 10}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu II (4,0 điểm).

1) Giải phương trình: $\sqrt{6-x} - \sqrt{2x+6} = x^2 - 2x - 18$.

2) Tìm a, b để đa thức $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ chia cho $x-1$ dư 3 và chia cho $x-2$ dư 5.

Câu III (4,0 điểm).

1) Chứng minh rằng $n^5 - n$ chia hết cho 240 với n là số tự nhiên lẻ bất kỳ.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - y^2(x + y^4 + 6y^2) = 0$.

3) Cho hình tròn (O) bán kính bằng 1. Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_8$ là 8 điểm bất kỳ nằm trong hình tròn (kể cả trên biên). Chứng minh rằng trong các điểm đã cho luôn tồn tại 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

Câu IV (6,0 điểm).

Cho đường tròn (O) và điểm M cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Qua M kẻ cát tuyến MAB với đường tròn (O) ($MA < MB$ và AB không đi qua O). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại K . Đường thẳng qua K vuông góc với MO , cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D phân biệt ($KC < KD$). Gọi N là trung điểm của đoạn AB .

1) Chứng minh rằng tứ giác $ONCD$ nội tiếp trong một đường tròn.

2) Gọi I là giao điểm của CD với AB . Chứng minh rằng $IAMB = IBMA$.

3) Qua B kẻ đường thẳng song song với CD , cắt đường tròn (O) tại điểm E (E khác B).

Chứng minh rằng đường thẳng AE luôn đi qua một điểm cố định khi cát tuyến MAB thay đổi.

Câu V (1,0 điểm).

Cho hai số dương a, b thay đổi thỏa mãn $a^3 + b^3 + 6ab \leq 8$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{3 + a^2 b^2}{ab}.$$

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo

danh:.....

Cán bộ coi thi 1 (Họ tên và ký):..... Cán bộ coi thi 2 (Họ tên và ký):.....

HƯỚNG DẪN CHẤM
BÀI THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC GIANG
NĂM HỌC 2021 - 2022

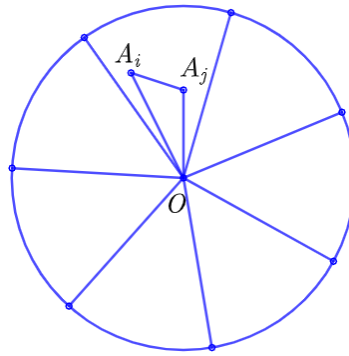
Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
Câu I		(5.0 đ)
Phần 1.a (2,0 điểm)	$A = \left[\frac{(2\sqrt{x})^3 - 1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)} - \frac{(2\sqrt{x})^3 + 1}{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)} \right] : \frac{2x+1}{2x-1}$	0.5
	$= \left[\frac{(2\sqrt{x} - 1)(4x + 2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)} - \frac{(2\sqrt{x} + 1)(4x - 2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x} + 1)} \right] : \frac{2x+1}{2x-1}$	0.5
	$= \left(\frac{4x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} - \frac{4x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{2x+1}{2x-1}$	0.5
	$= \frac{4(2x-1)}{2x+1}.$ Vậy $A = \frac{4(2x-1)}{2x+1}$ với điều kiện $x > 0, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4}.$	0.5
Phần 1.b (1,0 điểm)	Do A là số chính phương nên $A \geq 0$, kết hợp với điều kiện suy ra $x > \frac{1}{2}.$	0.5
	Khi đó $0 < \frac{2x-1}{2x+1} < 1 \Rightarrow 0 < A < 4.$	
	Vì A là số chính phương nên $A = 1.$	0.25
	Giải ra ta tìm được $x = \frac{5}{6}$ (thỏa mãn).	0.25

Phần 2 (2,0 điểm)	$\Delta' = (2m-1)^2 - (m^2 + m - 3) = 3m^2 - 5m + 4 = 3\left(m - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{23}{12} > 0 \quad \forall m \in \mathbf{R}$ suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbf{R}$.	0.5
	Theo hệ thức vi – ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m - 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + m - 3 \end{cases}$	0.25
	Ta có $B = \frac{x_1 + x_2 + 1}{(x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) + 10} = \frac{x_1 + x_2 + 1}{(x_1 + x_2 + 1)^2 + 9}$	0.5
	$= \frac{1}{6} - \frac{(x_1 + x_2 - 2)^2}{6[(x_1 + x_2 + 1)^2 + 9]} \leq \frac{1}{6} \quad \forall x_1, x_2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 + x_2 = 2$.	0.5
	Kết hợp với định lý vi – ét ta được $4m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 1$.	0.25

Câu II		(4.0 đ)
Phần 1 (2.5 điểm)	Điều kiện $-3 \leq x \leq 6$ (*). Phương trình đã cho tương đương $(\sqrt{6-x}-1) - (\sqrt{2x+6}-4) = x^2 - 2x - 15$	0.5
	$\Leftrightarrow \frac{5-x}{\sqrt{6-x}+1} - \frac{2(x-5)}{\sqrt{2x+6}+4} = (x-5)(x+3)$	0.5
	$\Leftrightarrow (x-5) \left(x+3 + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} \right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x+3 + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} = 0 \end{cases}$	0.5
	$x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn (*)).	0.25
	$x+3 + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4} = 0$ vô nghiệm khi $-3 \leq x \leq 6$.	0.5
	So sánh điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{5\}$.	0.25
Phần 2 (1.5 điểm)	Do $f(x)$ chia cho biểu thức $x-1$ có số dư là 3 suy ra $f(1)=3 \Rightarrow a+b=2$	0.5
	Do $f(x)$ chia cho biểu thức $x-2$ có số dư là 5 suy ra $f(2)=5 \Rightarrow 2a+b=1$	0.5
	Giải hệ $\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$. KL	0.5
Câu III		(4.0đ)
Phần 1	Do $n(n-1)(n+1):3 \Rightarrow n^5 - n = n(n-1)(n+1)(n^2+1):3$	0.25

(1.0 điểm)	Do $n-1, n+1$ là hai số chẵn liên tiếp nên $(n-1)(n+1):8$ và $n^2+1:2$ $\Rightarrow n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1):16$	0.25
	$\begin{aligned} n^5-n &= n(n-1)(n+1)(n^2+1) \\ &= n(n-1)(n+1)[(n^2-4)+5] \\ &= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5n(n-1)(n+1):5 \end{aligned}$	0.25
	Do 3, 5 và 16 đôi một nguyên tố cùng nhau nên $n^5-n:240$ (đpcm).	0.25
Phần 2 (2.0 điểm)	$x^2-y^2(x+y^4+6y^2)=0 \Leftrightarrow x^2-y^2x-(y^6+6y^4)=0$ (1) Ta có $\Delta_x = y^4+4(y^6+6y^4)=y^4(4y^2+25)$	0,25
	Nhận xét: Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của phương trình (1) thì $(x_0; -y_0)$ là nghiệm của phương trình (1). Không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét $y \geq 0$.	0,25
	Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x , ta cần phải có Δ_x là một số chính phương TH1: Xét $y=0$ và thay vào (1) ta được $x=0$ thỏa mãn nên $(x; y)=(0; 0)$ là một nghiệm của (1).	0,25
	TH2: Nếu $y > 0$, Δ_x là số chính phương khi $4y^2+25$ là số chính phương. Đặt $4y^2+25=m^2$ ($m \in \mathbf{N}^*$) $\Leftrightarrow (m-2y)(m+2y)=25$ (2).	0,25
	Vì $y \in \mathbf{N}^*, m \in \mathbf{N}^*$ nên $m-2y < m+2y$ và $m-2y; m+2y$ là các ước nguyên dương của 25. Từ (2) ta được $\begin{cases} m-2y=1 \\ m+2y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13 \\ y=6 \end{cases}$.	0,5
	Thay $y=6$ vào (1), rút gọn ta được $x^2-36x-54432=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=252 \\ x=-216 \end{cases}$.	0,25
	Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{(0; 0); (252; 6); (-216; 6); (252; -6); (-216; -6)\}$.	0,25
Phần 3 (1.0 điểm)	TH1: 8 điểm đã cho có điểm A_i trùng với tâm O của đường tròn. Nếu 7 điểm còn lại có điểm A_j nằm bên trong đường tròn (C) thì $A_i A_j < R=1$ (thỏa mãn).	0.25
	Nếu cả 7 điểm còn lại nằm trên đường tròn thì chúng chia đường tròn thành 7 cung. Do đó có một cung trong các cung đó có số đo nhỏ hơn $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Khoảng cách giữa hai điểm là đầu mút của cung đó nhỏ hơn $R=1$.	0.25
	TH2: Cả 8 điểm đã cho đều khác O . Ta chia hình tròn thành 7 quạt bằng nhau có góc ở	0.25

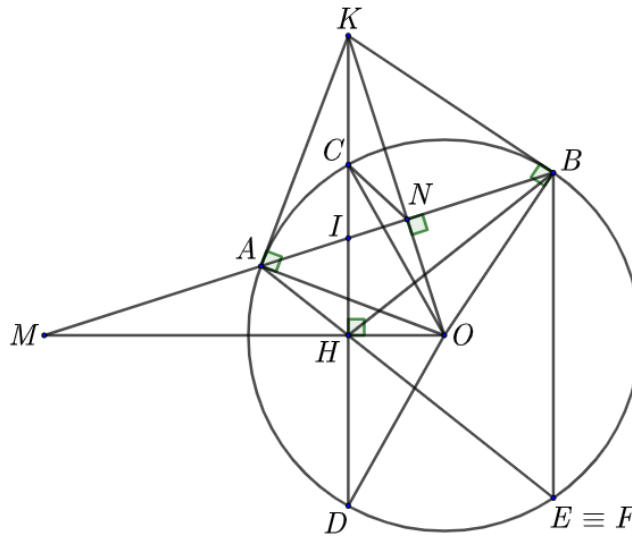
tâm bằng $\frac{360^\circ}{7} < 60^\circ$ (hình vẽ).



Theo nguyên lý Dirichlet, trong 8 điểm đã cho phải có 2 điểm thuộc cùng một trong 7 hình quạt thu được (có thể nằm trên biên của hình quạt). Giả sử A_i, A_j thuộc một hình quạt.

Khi đó $\angle A_i O A_j < 60^\circ$ nên một trong hai góc $\angle O A_i A_j$ hoặc $\angle O A_j A_i$ lớn hơn 60° (có thể bằng 180°), chẳng hạn góc $\angle O A_j A_i > 60^\circ$. Ta có $\angle A_i O A_j < \angle O A_j A_i$ nên $A_i A_j < O A_i \leq R = 1$. Vậy trong các điểm đã cho luôn tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

0.25

Câu IV**(6.0 đ)**

Theo bài chỉ ra được K, N và O thẳng hàng.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông KBO ta được $KB^2 = KN.KO$ (1)

0.5

Chứng minh được $KB^2 = KC.KD$ (2)

0.5

Phần 1
(2.5 điểm)

Từ (1) và (2) suy ra $KN.KO = KC.KD \Leftrightarrow \frac{KC}{KN} = \frac{KO}{KD}$

0.5

Nên tam giác KNC đồng dạng với tam giác KDO (c-g-c). Suy ra $\angle KDO = \angle KNC$

0,5

Suy ra tứ giác $ONCD$ nội tiếp trong một đường tròn.

0.5

Phần 2

Gọi H là giao điểm của CD và MO . Chỉ ra 5 điểm K, A, H, O và B cùng thuộc

0.5

(2.0 điểm)	đường tròn đường kính KO	
	Chỉ ra $AHK = KHB$ suy ra HI là đường phân giác trong của tam giác AHB $\Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{IA}{IB}$ (3)	0.5
	Vì $HM \perp HI$ nên HM là đường phân giác ngoài của tam giác $AHB \Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{MA}{MB}$ (4)	0.5
	Từ (3) và (4) suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{MA}{MB} \Rightarrow IA.MB = IB.MA.$	0.5
Phần 3 (1.5 điểm)	Chỉ ra $OH.OM = ON.OK = OB^2 \Rightarrow OH = \frac{OB^2}{OM}$ (không đổi) suy ra H là điểm cố định.	0.5
	Gọi F là giao điểm của AH với đường tròn (O) ($F \neq A$). $AHK = AOK$ (7) $AFB = \frac{1}{2} AOB = AOK$ (8) Từ (7) và (8) $\Rightarrow AHK = AFB \Rightarrow CD // BF.$	0.5
	Suy ra $F \equiv E$. Vậy AE đi qua điểm H cố định (đpcm).	0.5
	Câu V	(1.0 đ)
(1.0 điểm)	$a^3 + b^3 + 6ab \leq 8 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + (-2)^3 - 3a.b.(-2) \leq 0$ (*) Ta có $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow (a+b-2)[(a-b)^2 + (a+2)^2 + (b+2)^2] \leq 0 \Leftrightarrow 0 < a+b \leq 2$. Ta cũng suy ra $ab \leq 1$.	0.5
	Khi đó $P = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{3+a^2b^2}{ab} = \left(\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab}\right) + \left(\frac{1}{ab} + ab\right) + \frac{3}{2ab} \geq \dots \geq \frac{9}{2}$. KL Giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{2}$ khi $a = b = 1$.	0.5
Tổng	Điểm toàn bài	20 đ