

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG	KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2024-2025
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Môn: TOÁN Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề) Ngày thi: 28/8/2024 Đề thi gồm 01 trang, 04 câu.

Câu 1 (5.0 điểm) Cho $P(x)$ là đa thức monic (đa thức có hệ số của bậc cao nhất bằng 1) bậc 5, có đúng 5 nghiệm thực phân biệt $r_1, r_2, \dots, r_5$ và đa thức $Q(x) = x^2 + 4x + 2025$. Biết rằng tồn tại duy nhất số thực a để $P(Q(a)) = 0$.

- Giả sử $r = \max\{r_1, r_2, \dots, r_5\}$. Chứng minh rằng: $r = 2021$.
- Chứng minh rằng $P(2025) > 1024$.

Câu 2 (5.0 điểm) Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ 2025^{u_{n+1}} + u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} + \frac{u_n}{u_n + 1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

- Chứng minh dãy (u_n) xác định duy nhất.
- Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 3 (5.0 điểm) Cho tam giác ABC có O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D . Kẻ AH vuông góc BC tại H . Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC , gọi J là trung điểm cung BC không chứa A của đường tròn (O) . Gọi X đối xứng với J qua O . Từ I_a kẻ I_aN vuông góc BC tại N . Đường tròn (JDN) cắt AJ tại K (khác J).

- Gọi Q đối xứng với I qua BC . Chứng minh H, Q, I_a thẳng hàng và $HK \perp AJ$.
- Tia JH cắt (O) tại R và tia JN cắt (O) tại F . Cho AJ cắt XR, BC lần lượt tại E, L .

Chứng minh hai đường tròn (JLN) và (JEF) tiếp xúc với nhau.

Câu 4 (5.0 điểm) Cho n điểm $P_1, P_2, \dots, P_n$ được xếp theo thứ tự đó trên một đường thẳng. Ta tô màu mỗi điểm bởi 1 trong năm màu: trắng, đen, đỏ, xanh và tím. Một cách tô màu được coi là hợp lệ nếu hai điểm liên tiếp P_i, P_{i+1} được tô màu giống nhau hoặc ít nhất một trong hai điểm được tô màu trắng.

- Tìm số cách tô màu trong trường hợp $n = 1$ và $n = 2$.
- Đặt s_n là số cách tô màu hợp lệ. Giả sử n là số chẵn. Chứng minh rằng $\sqrt[3]{s_n} \geq \tau(s_n)$.

Trong đó $\tau(s_n)$ là số ước nguyên dương của s_n .

-----**HẾT**-----

Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.