

Câu I. (3,0 điểm)

1. Rút gọn các biểu thức: $A = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} - \sqrt{3}$; $B = \frac{x - \sqrt{x}}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = ax + b$. Tìm a và b để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $(d'): y = x + 2$ và cắt parabol $(P): y = x^2$ tại một điểm có hoành độ bằng -2 .

3. Một cốc nước có dạng hình trụ có bán kính đáy bằng $4cm$, chiều cao bằng $12cm$ và đang chứa một lượng nước cao $8cm$. Người ta thả vào cốc nước đó một viên bi dạng hình cầu làm bằng thủy tinh có đường kính bằng $6cm$. Hỏi mực nước trong cốc lúc này cao bao nhiêu?

Câu II. (3,0 điểm)

1. Giải phương trình: $3x^2 - 3x - \sqrt{x^2 - x - 2} = 8$

2. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x - 8 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < x_2$ và $|x_1| - |x_2| = 6$

3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(2x + 3)(2x + y) = 15 \\ 2x^2 + 5x + y = 8 \end{cases}$$

Câu III. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ đường cao AD của tam giác ABC (D thuộc BC). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của điểm D trên các cạnh AB, AC . Gọi S là giao điểm của EF và BC .

1. Chứng minh: $EFD = EDB$

2. Chứng minh tứ giác nội $BEFC$ nội tiếp và $SD^2 = SB \cdot SC$

3. Đường thẳng SA cắt đường tròn (O) tại M (M khác A), MD cắt đường tròn (O) tại N (N khác M). Gọi I là trung điểm của DN . Chứng minh $IF = IC$

Câu IV. (1,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 - 6q^2 = 1$

2. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = a^4 + b^4 + \frac{2024}{(a + b)^2} - 6a^2b^2$

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: Phòng thi:

Giám thị 1: Giám thị 2:

Câu I. (3,0 điểm)

Phần, ý	Nội dung	Điểm
1	a) $A = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{(3 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = 3$	0,5
	b) $B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = 1$	0,5
2	• $(d): y = ax + b$ song song với $(d'): y = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 2 \end{cases}$ $\Rightarrow (d): y = x + b \ (b \neq 2)$	0,5
	• Điểm thuộc $(P): y = x^2$ có hoành độ $x = -2$ là $M(-2; 4)$. • $(d): y = x + b \ (b \neq 2)$ đi qua điểm $M(-2; 4) \Leftrightarrow -2 + b = 4 \Leftrightarrow b = 6 \ (TM)$ Vậy $a = 1; b = 6$ là các giá trị cần tìm.	0,5
3	• Thể tích hình cầu là: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3 = 36\pi \ (cm^3)$	0,5
	• Phần nước dâng lên trong cốc có chiều cao là: $h = \frac{36\pi}{\pi \cdot 4^2} = 2,25 \ (cm)$. • Chiều cao mực nước trong cốc: $8 + 2,25 = 10,25cm$.	0,5

Câu II. (3,0 điểm)

Phần, ý	Nội dung	Điểm
1	$3x^2 - 3x - \sqrt{x^2 - x - 2} = 8 \Leftrightarrow 3(x^2 - x - 2) - \sqrt{x^2 - x - 2} - 2 = 0 \ (1)$ • ĐK: $x^2 - x - 2 \geq 0$ • Đặt $t = \sqrt{x^2 - x - 2} \ (t \geq 0)$, phương trình (1) trở thành: $3t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \ (TM) \\ t = -\frac{2}{3} \ (KTM) \end{cases}$	0,5

	$\bullet t=1 \Rightarrow \sqrt{x^2-x-2}=1 \Leftrightarrow x^2-x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{13}}{2} (TM) \\ x=\frac{1-\sqrt{13}}{2} (TM) \end{cases}$ Vậy phương trình có các nghiệm $x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2}; x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.	0,5
2	• Phương trình $x^2-2(m-1)x-8=0$ có: $\Delta'=[-(m-1)]^2-1.(-8)=(m-1)^2+8>0 \text{ với mọi } m.$ Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. (nếu thí sinh không tính Δ mà chỉ ra được $a.c=-8<0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi m, thì cũng được điểm tối đa mục này)	0,5
	• Theo định lý Viét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2m-2 & (1) \\ x_1x_2=-8 & (2) \end{cases}$ • Từ $x_1<x_2$ và $x_1x_2=-8$ suy ra $x_1<0<x_2$. Khi đó: $x_1 - x_2 =6 \Leftrightarrow -x_1-x_2=6 \Leftrightarrow -2m+2=6 \Leftrightarrow m=-2$. Vậy $m=-2$.	0,5
3	$\begin{cases} x(2x+3)(2x+y)=15 \\ 2x^2+5x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2+3x)(2x+y)=15 \\ (2x^2+3x)+(2x+y)=8 \end{cases}$	0,25
	Đặt $a=2x^2+3x; b=2x+y$, hệ trở thành: $\begin{cases} ab=15 \\ a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8-b \\ (8-b)b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8-b \\ b^2-8b+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8-b \\ \begin{cases} b=3 \\ b=5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases} \end{cases}$	0,25
	• $\begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+3x-5=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases} \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{5}{2} \\ y=8 \end{cases} \end{cases}$	0,25
	• $\begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+3x-3=0 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=\frac{-3+\sqrt{33}}{4} \\ x=\frac{-3-\sqrt{33}}{4} \end{cases} \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=\frac{-3+\sqrt{33}}{4} \\ y=\frac{13-\sqrt{33}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{-3-\sqrt{33}}{4} \\ y=\frac{13+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \end{cases}$ Vậy hệ có 4 nghiệm: $(1;1); (-\frac{5}{2};8); (\frac{-3+\sqrt{33}}{4}; \frac{13-\sqrt{33}}{2}); (\frac{-3-\sqrt{33}}{4}; \frac{13+\sqrt{33}}{2})$	0,25

	Suy ra $\widehat{ACN} = 90^\circ$. Lại có $\widehat{DFC} = 90^\circ$ nên tứ giác $CNDF$ là hình thang vuông. Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng FC. Ta có IJ là đường trung bình của $CNDF$, suy ra $IJ \perp FC$. Hay IJ là đường trung trực của FC nên $IF = IC$.	0,5
--	---	-----

Câu IV. (1,0 điểm)

Phần, ý	Nội dung	Điểm
1	Ta có $p^2 - 1 = 6q^2 \Leftrightarrow (p-1)(p+1) = 6q^2$ Vì $6q^2 : 2$ nên $(p-1)(p+1) : 2$. Mà $p-1$ và $p+1$ cùng tính chẵn lẻ nên chúng phải là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó $(p-1)(p+1) : 8$.	0,25
	Từ đó suy ra $6q^2 : 8 \Rightarrow 3q^2 : 4$. Mà $(3,4) = 1$ nên $q^2 : 4$. Vì q là số nguyên tố nên $q = 2$. Khi tính được $p = 5$.	0,25
2	Ta có $2\sqrt{ab} \leq a+b$; $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$ Mà giả thiết cho $a^2+b^2 = a+b$ nên $a+b \leq \sqrt{2(a+b)} \Rightarrow a+b \leq 2$. Từ đó suy ra $ab \leq 1$.	0,25
	Ta có $P = (a^2+b^2)^2 + \frac{2024}{(a+b)^2} - 8a^2b^2 = (a+b)^2 + \frac{16}{(a+b)^2} + \frac{2008}{(a+b)^2} - 8(ab)^2$ Ta có $(a+b)^2 + \frac{16}{(a+b)^2} \geq 2\sqrt{(a+b)^2 \frac{16}{(a+b)^2}} = 8$; $\frac{2008}{(a+b)^2} \geq \frac{2008}{4} = 502$; $-8(ab)^2 \geq -8$ Vậy $P \geq 8 + 502 - 8 = 502$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$. Vậy $\min P = 502$ đạt được khi $a=b=1$.	0,25

*** Chú ý:** Các lời giải đúng khác đều được xem xét cho điểm tương ứng.

----- HẾT -----