

Câu 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

- Rút gọn biểu thức P
- Tìm tất cả các giá trị của x để $|P| - P = 0$

Câu 2. (3,0 điểm)

1) Cho phương trình x: $x^2 - 5mx - 4m = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 5mx_2 + 16m - 5 = 0$

2) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y - xy \\ x - y + 2 = xy \end{cases}$$

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AC và AB lần lượt tại E và F. Gọi H là giao điểm của BE và CF, I là trung điểm của AH

- Chứng minh rằng tam giác IHE cân
- Chứng minh rằng IE là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- AH cắt BC và EF lần lượt tại D và M. Chứng minh rằng $IF^2 = IM \cdot ID$
- IC cắt đường tròn (O) tại N (khác C). Chứng minh B, M, N thẳng hàng

Câu 4. (1,0 điểm)

- Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, số $B = 9.5^{2n} + 13.3^n$ luôn chia hết cho 22
- Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a;b) sao cho ab là ước của $a^2 + b$

Câu 5. (1,0 điểm)

1) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq 3$$

2) Cho X là tập hợp gồm 26 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 100. Chứng minh rằng trong X luôn tồn tại hai số x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $\{5; 10; 15\}$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

c) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}-2) + 2(\sqrt{x}-1) + 2x-x\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x\sqrt{x}-2x+2\sqrt{x}-2+2x-x\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

d) Tìm tất cả các giá trị của x để $|P| - P = 0$

Ta có :

$$\begin{aligned} |P| - P = 0 &\Leftrightarrow \left| \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right| - \frac{2}{\sqrt{x}-1} = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right| = \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\ \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-1} > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $x > 1, x \neq 4$

Câu 2. (3,0 điểm)

1) Cho phương trình x: $x^2 - 5mx - 4m = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$x_1^2 + 5mx_2 + 16m - 5 = 0$$

Phương trình $x^2 - 5mx - 4m = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow (-5m)^2 - 4.1.(-4m) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{16}{25} (*) \\ m > 0 \end{cases}. \text{ Theo định lý Viet, ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 5m \\ x_1 x_2 = -4m \end{cases}$$

Mặt khác, x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên: $x_1^2 - 5mx_1 - 4m = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 5mx_1 + 4m$ (2)

Mà x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 5mx_2 + 16m - 5 = 0$ (3), nên thay (2) vào (3) ta có :

$$5mx_1 + 4m + 5mx_2 + 16m - 5 = 0 \Leftrightarrow 5m(x_1 + x_2) + 20m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5m \cdot 5m + 20m - 5 \Leftrightarrow 5m^2 + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{5} \\ m = -1 \end{cases} \quad (tm(*))$$

Vậy $m = \frac{1}{5}; m = -1$

2) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y - xy \\ x - y + 2 = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y - xy \\ x - y + 2 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 2y - xy \\ xy = x - y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 2y + xy \\ xy = x - y + 2 \end{cases}$$

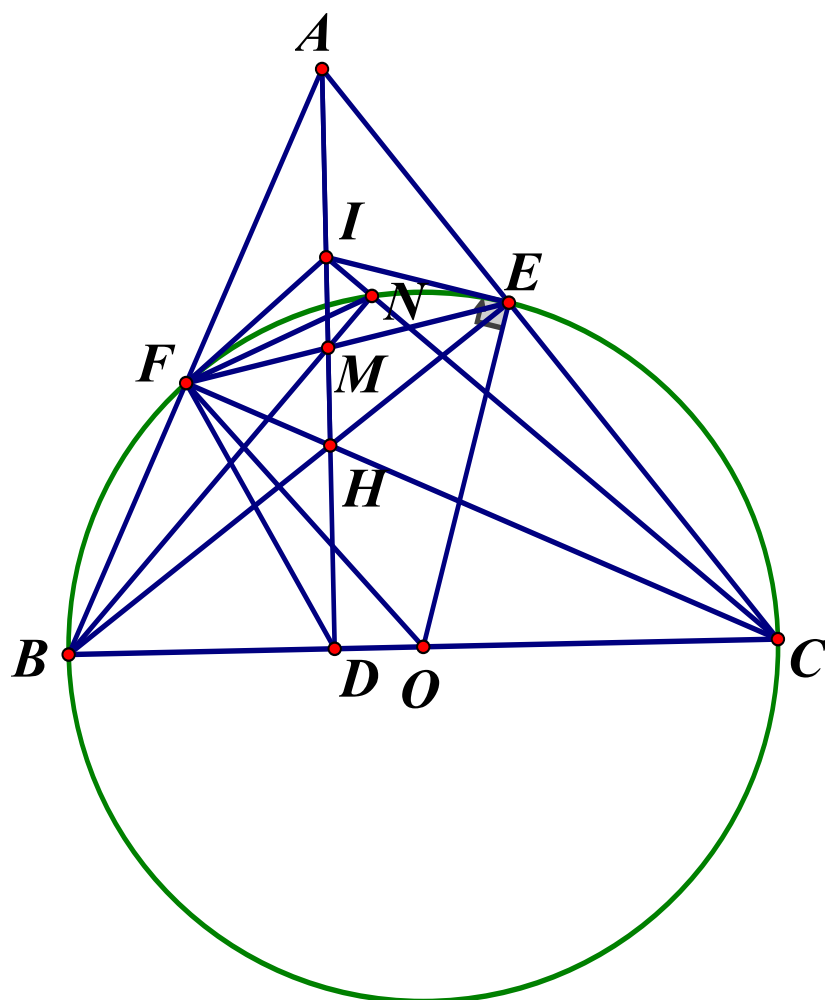
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 2y + x - y + 2 \\ xy = x - y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - (x+y) - 2 = 0 \\ xy = x - y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x + y = 2 \\ xy = x - y + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ xy = x - y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - 1 \\ x^2 + 3x + 3 = 0(VN) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = x - y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (0; 2)$

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn tâm O đường kính BC cắt các cạnh AC và AB lần lượt tại E và F . Gọi H là giao điểm của BE và CF , I là trung điểm của AH



e) Chứng minh rằng tam giác IHE cân

Chứng minh tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

Suy ra I là tâm đường tròn $(AEHF)$ (1)

Suy ra $IE = IH \Rightarrow \triangle IHE$ cân

f) Chứng minh rằng IE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

$BE \perp AC, CF \perp AB \Rightarrow AH \perp BC$ nên $\angle ACB + \angle HAC = 90^\circ$ (2)

Mà $\triangle IAE, \triangle OCE$ cân nên $\angle ACB = \angle OEC, \angle HAC = \angle AEI$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\angle AEI + \angle OEC = 90^\circ$ hay $\angle IEO = 90^\circ$

Suy ra IE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

g) AH cắt BC và EF lần lượt tại D và M . Chứng minh rằng $IF^2 = IM \cdot ID$

Vì IE là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\angle FEI = \angle FBE \left(= \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{FE} \right)$

Mà $\angle FEI = \angle MFI$ ($IE = IF$); $\angle FBE = \angle FDH$ (tứ giác $BDHF$ nội tiếp)

Suy ra $\angle FDH = \angle MFI \Rightarrow \triangle IFM \sim \triangle IDF$

Từ đó $\frac{IF}{IM} = \frac{ID}{IF} \Rightarrow IF^2 = IM \cdot ID$ (4)

h) IC cắt đường tròn (O) tại N (khác C). Chứng minh B, M, N thẳng hàng

Chứng minh tương tự câu b ta có IF là tiếp tuyến của đường tròn (O)

Suy ra $\triangle IFN \sim \triangle ICF \Rightarrow \frac{IF}{IC} = \frac{IN}{IF} \Rightarrow IF^2 = IC \cdot IN$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $IC \cdot IN = IM \cdot ID \Rightarrow \triangle IMN \sim \triangle IDC$

Mà $\angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle INM = 90^\circ$ hay $MN \perp IC$

Lại có $BN \perp IC$ nên B, M, N thẳng hàng

Câu 4. (1,0 điểm)

1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , số $B = 9 \cdot 5^{2n} + 13 \cdot 3^n$ luôn chia hết cho 22

Ta có :

$$\begin{aligned} B &= 9 \cdot 5^{2n} + 13 \cdot 3^{2n} = 9 \cdot 25^n + 13 \cdot 3^n \\ &= 22 \cdot 25^n - 13 \cdot 25^n + 13 \cdot 3^n = 22 \cdot 25^n - (13 \cdot 25^n - 13 \cdot 3^n) = 22 \cdot 25^n - 13 \cdot (25^n - 3^n) \end{aligned}$$

Vì $(a^n - b^n) : (a - b)$ với mọi số tự nhiên n

Vậy, với mọi số tự nhiên n , số $B = 9 \cdot 5^{2n} + 13 \cdot 3^n$ luôn chia hết cho 22

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho ab là ước của $a^2 + b$

Gọi UCLN của a và b là d , suy ra $a = a_1 d$, $b = b_1 d$ với $(a_1; b_1) = 1$. Theo đề bài ta có :

$$(a^2 + b) : ab \Rightarrow (a_1^2 d^2 + b_1 d) : d^2 \cdot a_1 b_1 \Rightarrow (a_1^2 d + b_1) : d a_1 b_1$$

$$\Rightarrow a_1^2 d : b_1 \text{ và } b_1 : d a_1 \text{ mà } (a_1, b_1) = 1 \text{ nên } a_1 = 1, d = b_1$$

$$\Rightarrow 2d : d^2 \Rightarrow d \in \{1; 2\} \Rightarrow (a, b) = (1; 1), (2; 4)$$

Câu 5. (1,0 điểm)

3) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq 3$$

Đặt $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y; \frac{1}{c} = z \Rightarrow x + y + z = 1$. Khi đó :

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} = \sqrt{x^2 + 2y^2} = \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 + z^2).3}{3}} \geq \sqrt{\frac{(x+2y)^2}{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (x+2y)}{3} \quad (1)$$

Tương tự : $\frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} \geq \frac{\sqrt{3}(2z+y)}{3} \quad (2); \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \frac{\sqrt{3} \cdot (2x+z)}{3} \quad (3)$

Cộng (1), (2), (3) ta có :

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \frac{\sqrt{3} \cdot (3x+3y+3z)}{3} = \sqrt{3} \text{ (đpcm)}$$

4) Cho X là tập hợp gồm 26 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 100. Chứng minh rằng trong X luôn tồn tại hai số x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $\{5; 10; 15\}$

Chia 26 số nguyên trong tập hợp X thành 5 đoạn $[1; 20], [21; 40], [41; 60], [61; 80], [81; 100]$

Vì 26 số chia 5 đoạn nên theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 1 đoạn có ít nhất 6 số

Vì một số chia 5 chỉ có thể dư 0, 1, 2, 3, 4. Nên trong 6 số đó có ít nhất 2 số x, y có cùng số dư khi chia cho 5 nên $x - y : 5 \quad (1)$

Mà trong mỗi đoạn hiệu hai số lớn nhất là 19 nên $x - y \leq 19 \quad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow x - y \in \{5; 10; 15\}$