

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN
NĂM HỌC: 2024 – 2025**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn chuyên: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Không kể thời gian giao đề)

Bài 1:

a) Cho biểu thức $A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A < -\frac{8}{5}$

b) Cho a, b là các số hữu tỉ. Chứng minh $\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2}$ là số hữu tỉ

Câu 2:

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - 4mx - 3 = 0$ có hai nghiệm nguyên phân biệt.

b) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3 = 2b^4 + a^2b$. Chứng minh a chia hết cho b.

Câu 3:

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (p; q) sao cho $p^2 + q^2 + 4pq + 52$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x; y) sao cho $5^x - 1 = 4y^4$

Câu 4:

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 4$.

a) Chứng minh $4ab + ac + bc \geq 4abc$

b) Chứng minh $\frac{2a}{4a+bc} + \frac{2b}{4b+ac} + \frac{3c}{4c+ab} \leq \frac{4}{3}$

Câu 5:

Cho một bảng 4 x 5 ô vuông gồm 4 hàng và 5 cột (như hình vẽ bên). Ta ghi các số tự nhiên từ 1 đến 20 vào các ô, mỗi ô chứa đúng một số và các số ở mỗi ô là khác nhau. Gọi d_i với $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ là hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất ở hàng thứ i. Gọi D là giá trị lớn nhất trong các giá trị d_1, d_2, d_3, d_4 . Ta gọi D là “độ lệch” của hàng

a) Hãy chỉ ra một cách ghi để $D = 4$

b) Hãy chỉ ra một cách ghi để $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 5$

c) Với mỗi cách ghi bất kì, ta tiến hành sắp xếp lại các số trong bảng theo quy luật: ở mỗi cột, các số được xếp giảm dần (số trên cùng là lớn nhất, số dưới cùng là nhỏ nhất). Chứng minh sau khi sắp xếp lại thì “độ lệch” của bảng mới không lớn hơn “độ lệch” của bảng cũ.

Câu 6:

Cho tam giác nhọn ABC có $BC < AB < AC$. Gọi BD, CE là các đường cao, H là trực tâm của tam giác ABC. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm P (P khác H và C), M là điểm trên cạnh AC sao cho tia BD là phân giác của góc MBP. Gọi N là điểm đối xứng với B qua E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC cắt BM tại K (K khác M).

a) Chứng minh BHKM là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BKP.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh I, K, H thẳng hàng.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Cho biểu thức $A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A < -\frac{8}{5}$

b) Cho a, b là các số hữu tỉ. Chứng minh $\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2}$ là số hữu tỉ

Lời giải:

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{15\sqrt{x}-11-(3x+7\sqrt{x}-6)-(2x+\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \end{aligned}$$

$$\text{Để } A < -\frac{8}{5} \Leftrightarrow \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} < -\frac{8}{5} \Leftrightarrow -25\sqrt{x}+10 < -8\sqrt{x}-24 \text{ (do } \sqrt{x}+3 > 0)$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x} > 2 \Leftrightarrow x > 4$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } &\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2} \\ &= \sqrt{a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4} \\ &= \sqrt{(a^2-ab+b^2)^2} = |a^2-ab+b^2| \end{aligned}$$

Do a, b hữu tỉ nên a^2, ab, b^2 hữu tỉ

Suy ra $|a^2-ab+b^2|$ hữu tỉ

Vậy $\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2}$ hữu tỉ.

Câu 2:

a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2-4mx-3=0$ có hai nghiệm nguyên phân biệt.

b) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3=2b^4+a^2b$. Chứng minh a chia hết cho b.

Lời giải:

a) Phương trình $x^2-4mx-3=0$ là phương trình bậc hai theo x có biệt thức

$$\Delta' = (-2m)^2 + 3 = 4m^2 + 3 \geq 3 > 0$$

Phương trình luôn có hai nghiệm (thực) phân biệt

$$x_1 = 2m - \sqrt{4m^2 + 3}$$

$$x_1 = 2m + \sqrt{4m^2 + 3}$$

Do $x_1 + x_2 = 4m$ nên để $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ thì $m = \frac{a}{4} (a \in \mathbb{Z})$

Khi đó:
$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 12}}{2}, x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 12}}{2}$$

Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên điều kiện cần để $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ là $12 + a^2$ là số chính phương (vì căn bậc hai của một số tự nhiên là số tự nhiên hoặc số vô tỉ)

Suy ra, tồn tại số nguyên dương b sao cho

$$12 + a^2 = b^2 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = -12$$

Do $a - b < a + b$ và $(a - b) + (a + b) = 2a$ là số chẵn nên suy ra

$$\begin{cases} a - b = -6 \\ a + b = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a - b = -2 \\ a + b = 6 \end{cases}$$

Suy ra $a = -2, b = 4$ hoặc $a = 2, b = 4$

Như thế, $4m \in \{-2; 2\}$ nên $m \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

Thử lại với $m = -\frac{1}{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm nguyên là 1 và -3

Với $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm nguyên là -1 và 3

b) Trước hết, ta sẽ chứng minh a và b cùng tính chẵn lẻ

Thật vậy, nếu a là số lẻ thì dễ dàng chứng minh được b cũng là số lẻ

Nếu a là số chẵn thì từ $2b^4 = a^2(a - b):4$ ta thu được b là số chẵn

Ta có: $a^3 = 2b^4 + a^2b = b(2b^3 + a^2)$ nên a^3 chia hết cho b

Ngoài ra, do $\frac{a - b}{2} = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$ và a, b cùng tính chẵn lẻ nên $b^2 : a$

Vì vậy a và b có cùng tập ước nguyên tố, giả sử đó là $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

Đặt $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$

Trong đó α_i, β_i là các số nguyên dương

Ta có:
$$\prod_{i=1}^n p_i^{3\alpha_i} = a^3 = 2b^4 + a^2b = 2 \prod_{i=1}^n p_i^{4\beta_i} + \prod_{i=1}^n p_i^{2\alpha_i + \beta_i} \quad (1)$$

Nếu tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $\alpha_i < \beta_i$, chia hai vế của đẳng thức (1) cho $p_i^{3\alpha_i}$,

$$\prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} p_j^{3\alpha_j} = 2p_i^{4\beta_i - 3\alpha_i} \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} p_j^{4\beta_j} + p_i^{\beta_i - \alpha_i} \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} p_j^{2\alpha_j + \beta_j} \quad (2)$$

Ta nhận thấy vế trái của (2) không chia hết cho p_i (do $\beta_i > \alpha_i$)

Từ đó, ta có điều mâu thuẫn

Vì vậy $\alpha_i \geq \beta_i$, với mọi $i = \overline{1, n}$

Vậy a chia hết cho b .

Câu 3:

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ sao cho $p^2 + q^2 + 4pq + 52$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $5^x - 1 = 4y^4$

Lời giải

a) Giả sử trong hai số p, q không có số nào bằng 2

Khi đó p, q là các số nguyên tố nên p, q lẻ, do đó $p^2 \equiv 1 \pmod{4}, q^2 \equiv 1 \pmod{4}$

Cho nên $p^2 + q^2 + 4pq + 52 \equiv 2 \pmod{4}$ không thể là số chính phương, vì số chính phương chia 4 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1.

Do đó phải có một số bằng 2, giả sử đó là p .

Khi đó $q^2 + 8q + 56$ là số chính phương

Đặt $q^2 + 8q + 56 = t^2 (t \in \mathbb{N})$

Suy ra $(t - q - 4)(t + q + 4) = 40$

Vì vậy, $t - q - 4$ và $t + q + 4$ đều là ước của 40, hơn nữa $t - q - 4 < t + q + 4$

Và $t - q - 4, t + q + 4$ cùng tính chẵn lẻ

Xét bảng sau

$t - q - 4$	-20	-10	2	4
$t + q + 4$	-2	-4	20	10
t	-11	-7	11	7
q	5	-1	5	-1
	Loại	Loại	Loại	Loại

Vậy $(p, q) \in \{(2; 5); (5; 2)\}$

b) Ta có: $5^x - 1 = 4y^4$

$$\Leftrightarrow 5^x = 4y^4 + 1$$

$$\Leftrightarrow 5^x = (2y^2 + 1)^2 - (2y)^2$$

$$\Leftrightarrow 5^x = (2y^2 - 2y + 1)(2y^2 + 2y + 1)$$

Do đó $\begin{cases} 2y^2 - 2y + 1 = 5^a \\ 2y^2 + 2y + 1 = 5^b \end{cases} (a, b \in \mathbb{N}, a < b, a + b = x)$

Suy ra $(2y^2 - 2y + 1) | (2y^2 + 2y + 1) \quad (1)$

Hay $(2y^2 - 2y + 1) | 4y$

Thử với $y = 1, 2, 3$ được cặp $(x, y) = (1, 1)$ thỏa mãn

Với $y > 3$ thì $4y - (2y^2 - 2y + 1) = -2y(y - 4) - 1 < 0$

Mà $(2y^2 - 2y + 1), 4y$ đều dương

nên $(2y^2 - 2y + 1)$ không là ước của $4y$, mâu thuẫn (1)

Vậy $(x, y) = (1, 1)$

Câu 4:

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 4$.

a) Chứng minh $4ab + ac + bc \geq 4abc$

b) Chứng minh $\frac{2a}{4a+bc} + \frac{2b}{4b+ac} + \frac{3c}{4c+ab} \leq \frac{4}{3}$

Lời giải:

a) Ta có: $4ab + ac + bc \geq 4abc$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$$

$$\text{Mà } VT \geq \frac{(2+1+1)^2}{a+b+c} = 4 = VP(dpcm)$$

b) Cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{4a+bc} + \frac{2b}{4b+ac} + \frac{3c}{4c+ab} \leq \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{2a}{(a+b+c)a+bc} + \frac{2b}{(a+b+c)b+ac} + \frac{3c}{(a+b+c)c+ab} \leq \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{2a(b+c) + 2b(a+c) + 2c(a+b)}{(a+c)(b+c)(a+b)} \leq \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{5ac+5bc+4ab}{(a+c)(b+c)(a+b)} \leq \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow & 15ac+15bc+12ab \leq 4(a+c)(b+c)(c+b) \\ \Leftrightarrow & 0 \leq 4(4-a)(4-b)(4-c) - (15ac+15bc+12ab) \\ \Leftrightarrow & 0 \leq -4abc+4ab+ac+bc-64(a+b+c)+256 \\ \Leftrightarrow & 4abc \leq 4ab+ac+bc \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đã được chứng minh ở câu a

Dấu bằng xảy ra khi $(a, b, c) = (1, 1, 2)$

Câu 5: Cho một bảng 4 x 5 ô vuông gồm 4 hàng và 5 cột (như hình vẽ bên). Ta ghi các số tự nhiên từ 1 đến 20 vào các ô, mỗi ô chứa đúng một số và các số ở mỗi ô là khác nhau. Gọi d_i với $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ là hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất ở hàng thứ i . Gọi D là giá trị lớn nhất trong các giá trị d_1, d_2, d_3, d_4 . Ta gọi D là “độ lệch” của hàng

a) Hãy chỉ ra một cách ghi để $D = 4$

b) Hãy chỉ ra một cách ghi để $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 5$

c) Với mỗi cách ghi bất kì, ta tiến hành sắp xếp lại các số trong bảng theo quy luật: ở mỗi cột, các số được xếp giảm dần (số trên cùng là lớn nhất, số dưới cùng là nhỏ nhất). Chứng minh sau khi sắp xếp lại thì “độ lệch” của bảng mới không lớn hơn “độ lệch” của bảng cũ.

Lời giải:

a) Dễ thấy, bảng sau có $D = 4$:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

b) Dễ thấy, bảng sau có $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 5$

1	2	3	4	6
5	7	8	9	10
11	12	13	14	16
15	17	18	19	20

c) Ta đánh số của bảng ban đầu như sau:

$$\begin{array}{cccc}
b_1 & b_2 & \dots & b_5 \\
b_6 & b_7 & \dots & b_{10} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{16} & b_{17} & \dots & b_{20}
\end{array}$$

Sau khi sắp xếp lại bảng, ta có bảng như sau:

$$\begin{array}{cccc}
a_1 & a_2 & \dots & a_5 \\
a_6 & a_7 & \dots & a_{10} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{16} & a_{17} & \dots & a_{20}
\end{array}$$

Gọi d'_i là hiệu số giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của hàng i ở bảng ban đầu;

d_i là hiệu số giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của hàng i ở bảng lúc sau;

$$D' = \max\{d'_i\}, \text{ với } i = 1, 2, 3, 4; D = \max\{d_i\} \text{ với } i = 1, 2, 3, 4$$

Giả sử hàng j có d_j lớn nhất ở bảng lúc sau, gọi hai số lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là a_l, a_k .

Không mất tính tổng quát, ta cố định cột chứa số lớn nhất của hàng j (cột chứa số a_l) và xếp lại vị trí của các số còn lại sao cho giống với ban đầu.

Khi đó, giả sử số a_k được thay vị trí bởi số b_k

Do sự sắp xếp chỉ diễn ra trên cùng một cột nên a_k với b_k cùng cột.

Nếu $b_k < a_k$.

Giả sử b_k cùng hàng với b_l mà b_l cùng cột với a_l , ta có $b_l > a_l > a_k$

Gọi d'_l là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của hàng chứa b_l , ta có:

$$d_j = a_l - a_k < b_l - b_k \leq d'_l \leq D'$$

Nếu a_k giữ nguyên vị trí thì $a_l - a_k = d_j = d'_j \leq D'$

Vậy nếu hàng j có d_j lớn nhất thì $d_j \leq D'$

Điều này cho thấy $D \leq D'$

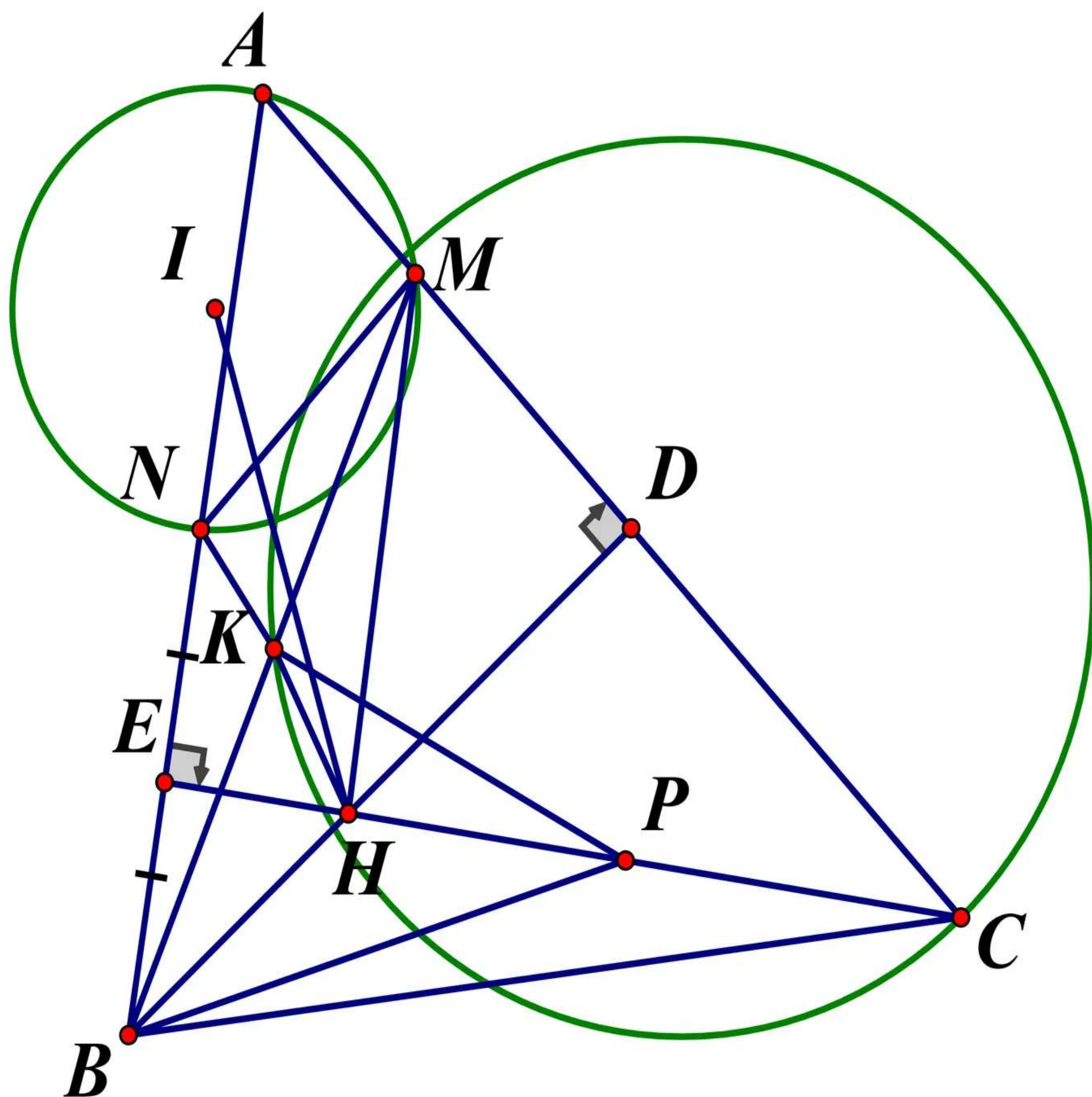
Câu 6: Cho tam giác nhọn ABC có $BC < AB < AC$. Gọi BD, CE là các đường cao, H là trực tâm của tam giác ABC. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm P (P khác H và C), M là điểm trên cạnh AC sao cho tia BD là phân giác của góc MBP. Gọi N là điểm đối xứng với B qua E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC cắt BM tại K (K khác M).

a) Chứng minh BHKN là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BKP.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh I, K, H thẳng hàng.

Lời giải:



a) Ta có: $BNH = NBH = ABH = ACH = MCH = BKH$

Suy ra tứ giác BHKN nội tiếp

b) Ta có: $KHP = KHC = 180^\circ - KMC = 180^\circ - BMD$

Mặt khác, $\frac{KBP}{2} = KBH = MBD$

Suy ra, $KHP - \frac{KBP}{2} = 180^\circ - BMD - MBD = 90^\circ$

Hay $KHP = 90^\circ + \frac{KBP}{2}$

Kết hợp với BH là phân giác của góc KBP ta thu được H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BKP.

c) Vì H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BKP nên PH là tia phân giác của góc KPB. Hay nói cách khác, đường thẳng PK và PB đối xứng với nhau qua CH.

Kết hợp với n và B đối xứng nhau qua HC, ta thu được ba điểm P, K, N thẳng hàng.

Ta có: $MKN = BKP = 90^\circ + \frac{BHP}{2} = 90^\circ + \frac{180^\circ - BAC}{2} = 180^\circ - \frac{MAN}{2} = 180^\circ - MIN$

Do đó tứ giác MINK nội tiếp

Cuối cùng, $IKN = IMN = 90^\circ - MAN = 90^\circ - BAD = ABD = NBH = 180^\circ - NKH$

Vậy ba điểm I, K, N thẳng hàng

Nhận xét: Đây là một câu hình hay với ý tưởng chủ yếu biến đổi góc. Vấn đề đặt ra không quá khó nhưng có thể “giữ chân” một số bạn do yếu tố thời gian và tâm lý. Tuy nhiên, điểm E trong bài toán này dường như không có vai trò gì hết.