

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THÀNH PHỐ LÀO CAI  
NĂM HỌC 2024-2025**

**Môn thi: TOÁN**

(Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề)  
(Đề thi gồm có: 01 trang, 06 câu)

**Câu 1 (5,0 điểm)**

1.1. Cho biểu thức:  $A = \left( \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{4\sqrt{x}-8}{x\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}-4} \right) : \left( \frac{1}{4\sqrt{x}+4} - \frac{2}{4x+4\sqrt{x}} \right)$  ( $x > 0; x \neq 4$ )

a, Rút gọn  $A$

b, Tìm tất cả giá trị thực của  $x$  sao cho  $A$  nhận giá trị là các số nguyên

1.2. Cho các số thực  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \neq 0$ . Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{2c-2a}{(a+b)(b+c)} + \frac{2d-2b}{(b+c)(c+d)} + \frac{2a-2c}{(c+d)(d+a)} + \frac{2b-2d}{(d+a)(a+b)}$$

**Câu 2 (2,0 điểm)**

Trên mặt bàn có 2 chiếc hộp, trong hộp thứ nhất có 5 viên bi màu đỏ và 9 viên bi màu xanh. Trong hộp thứ hai có 7 viên bi màu đỏ và 8 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một viên bi. Tính xác suất để lấy được 2 viên bi cùng màu.

**Câu 3 (2,0 điểm)**

Hội khỏe Phù Đổng cấp tỉnh năm 2023 có nhiều bộ môn thể thao được tổ chức. Tuấn và Tú đăng kí tham gia môn điền kinh. Mỗi vận động viên chạy liên tục trên đường đua từ A đến B rồi lập tức quay trở lại A, cứ thế đủ 3 lượt liên tiếp. Tuấn thuộc nhóm 1 xuất phát từ A, khi Tuấn đến B thì Tú thuộc nhóm 2 bắt đầu xuất phát từ A. Hai bạn gặp nhau lần thứ nhất ở điểm cách A là 200m và gặp nhau lần thứ hai tại điểm cách B là 100m. Tính quãng đường mà mỗi bạn phải chạy theo quy định của hội thi.

**Câu 4 (2,0 điểm)**

4.1. Cho  $x > 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $B = x + \frac{4}{x-1}$

4.2. Cho  $x, y, z$  là các số thực lớn hơn 2023, thỏa mãn  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{2023}$ . Chứng minh

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-2023} + \sqrt{y-2023} + \sqrt{z-2023}$$

**Câu 5 (3,0 điểm)**

5.1. Cho  $C = 16^n - 9^n - 7$  với mọi  $n \in \mathbb{N}; n \geq 1$ . Chứng minh  $C$  chia hết cho 21.

5.2. Tìm tất cả các số tự nhiên  $n$  và  $k$  để  $A = n^4 + 4^{2k+1}$  là số nguyên tố.

5.3. Tìm tất cả các số nguyên  $x, y$  thỏa mãn phương trình:

$$x^2y - xy + 2x - 1 = y^2 - xy^2 - 2y$$

**Câu 6 (6,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $F$ , vẽ  $FE$  vuông góc với  $BC$  tại  $E$ . Gọi  $(O)$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $CEF$ . Đường thẳng  $BF$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $D$ ,  $DE$  cắt  $AC$  tại  $H$ .

a) Chứng minh:  $BCA = BDA$

b) Chứng minh:  $OE^2 = OH.OA$

c) Đường thẳng  $AD$  cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $G$ ,  $FG$  cắt  $CD$  tại  $I$ ,  $CG$  cắt  $FD$  tại  $K$ . Chứng minh rằng  $I, K, H$  thẳng hàng.

-----Hết-----

**LỜI GIẢI THAM KHẢO**

## ĐỀ THI CHỌN HSG VÒNG 2 THÀNH PHỐ LÀO CAI 2024-2025

Trung tâm toán học Pytago Education

Câu 1.1

Cho biểu thức:  $M = \left( \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{\sqrt{xy}(x+y) - xy}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}, (x > 0; y > 0)$

a) Rút gọn  $M$

b) Biết  $x + y = 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $M$ .

*Lời giải*

$$\begin{aligned} \text{a) } M &= \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{xy} \cdot (x - \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \end{aligned}$$

b) Với  $x + y = 4, x > 0; y > 0$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương ta có  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = 2$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{2}{\sqrt{\sqrt{xy}}} \geq \sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = y = 2$

Vậy min  $M = \sqrt{2}$  khi  $x = y = 2$

Câu 1.2

Cho các số dương  $a, b$  thỏa mãn  $ab + a + b = 1$ . Chứng minh  $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} = \frac{ab+1}{\sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)}}$

*Lời giải* Ta có  $a^2 + 1 = a^2 + ab + a + b = (a+1)(a+b)$

$$b^2 + 1 = b^2 + ab + a + b = (b+1)(a+b)$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} &= \frac{a}{(a+1)(a+b)} + \frac{b}{(b+1)(a+b)} = \frac{a(b+1) + b(a+1)}{(a+1)(b+1)(a+b)} \\ &= \frac{ab + ab + a + b}{(ab + a + b + 1)(a+b)} = \frac{ab+1}{2(a+b)} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có: } \frac{ab+1}{\sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)}} = \frac{ab+1}{\sqrt{2(a+1)(b+1)(a+b)^2}} = \frac{ab+1}{\sqrt{2(ab+a+b+1)(a+b)^2}}$$

$$= \frac{ab+1}{\sqrt{4(a+b)^2}} = \frac{ab+1}{2(a+b)} \quad (\text{vì } a > 0, b > 0) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} = \frac{ab+1}{\sqrt{2(a^2+1)(b^2+1)}} \text{ (đpcm)}$

Câu 2

Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên gồm 3 chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 4.

*Lời giải*

\*Số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau có dạng  $\overline{abc}$ .

$a$  có 9 cách chọn (vì  $a \neq 0$ )

$b$  có 9 cách chọn (vì  $b \neq a$ )

$c$  có 9 cách chọn (vì  $c \neq a, c \neq b$ )

$\Rightarrow$  Số cách chọn số tự nhiên  $\overline{abc}$  là  $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648 = n(\Omega)$

\*Để  $\overline{abc} : 4$  thì  $\overline{bc}$  phải thuộc các trường hợp sau:

**TH1:**  $\overline{bc}$  thuộc  $T = \{04; 08; 20; 40; 60; 80\}$

Khi đó  $\overline{bc}$  có 6 cách chọn và  $a$  có 8 cách chọn (vì  $a \neq b, a \neq c$ )

$\Rightarrow$  Trường hợp này có  $6 \cdot 8 = 48$  số

**TH2:**  $\overline{bc}$  thuộc vào tập  $S$  với  $S$  là tập  $\{04; 08; 12; \dots; 96\}$  bỏ đi tập  $T$  và tập  $\{44; 48\}$  (vì 2 chữ số giống nhau.)

$\Rightarrow$  Số cách chọn  $\overline{bc}$  là  $\frac{96-4}{4} + 1 - 6 - 2 = 16$

Số cách chọn  $a$  là 7 (vì  $a \neq 0; a \neq b; a \neq c$ )

$\Rightarrow$  Trường hợp này có  $7 \cdot 16 = 112$  số

Xác suất cần tính là  $P = \frac{112 + 48}{648} = \frac{20}{81}$

Câu 3

Có hai bình đựng nước. Bình I đang chứa 18 lít nước, bình II đang chứa 10 lít nước. Nếu rót từ bình I sang đầy bình II thì lượng nước còn lại trong bình I chỉ bằng  $\frac{1}{3}$  thể tích của nó. Nếu rót từ bình II sang đầy bình I thì lượng nước còn lại trong bình II chỉ bằng  $\frac{1}{5}$  thể tích của nó. Tính thể tích của mỗi bình?

*Lời giải*

Gọi thể tích của bình I, bình II lần lượt là  $x, y$  (lít), điều kiện  $x > 18; y > 10$ .

Lượng nước đã rót từ bình I thì làm đầy bình II là  $18 - \frac{1}{3}x = y - 10 \Leftrightarrow x + 3y = 84$

Lượng nước đã rót từ bình II thì làm đầy bình I là  $10 - \frac{1}{5}y = x - 18 \Leftrightarrow 5x + y = 140$

Giải hệ phương trình ta được  $\begin{cases} x + 3y = 84 \\ 5x + y = 140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24(t/m) \\ y = 20(t/m) \end{cases}$

Vậy thể tích của bình I là 24 lít và thể tích của bình II là 20 lít.

Câu 4.1

Cho hai số thực  $a, b$ . Chứng minh  $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$

*Lời giải*

**Cách 1:** Áp dụng BĐT Cô-si cho 4 số không âm, ta có:

$$a^4 + a^4 + a^4 + b^4 \geq 4|a^3b| \geq 4a^3b$$

Tương tự  $a^4 + b^4 + b^4 + b^4 \geq 4ab^3$

$$\Rightarrow 4(a^4 + b^4) \geq 4ab(a^2 + b^2)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) \text{ (đpcm)}$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow a = b$ .

**Cách 2:**

$$a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^3(a - b) - b^3(a - b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^3 - b^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$$

Mà  $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$  nên bất đẳng thức đúng

Câu 4.2

Xét các số thực  $a, b, c$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{a^4 + c^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c}$$

*Lời giải* Theo chứng minh câu 4.1 ta có:  $b^4 + c^4 \geq bc(b^2 + c^2)$

Do  $abc = 1$  nên  $b^4 + c^4 + a = b^4 + c^4 + a^2bc \geq bc(a^2 + b^2 + c^2)$

$$\Rightarrow \frac{a}{b^4 + c^4 + a} \leq \frac{a}{bc(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{a^2}{abc(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Tương tự và cộng lại ta được:  $P \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Vậy giá trị lớn nhất  $P = 1$  khi  $a = b = c = 1$ .

Câu 5.1

Chứng minh với mọi số nguyên  $n$  ta có  $Q = n^3 - 2023n$  chia hết cho 6.

$$Q = n^3 - 2023n$$

*Lời giải* Ta có:  $Q = n^3 - 2023n \equiv n^3 - n = n(n-1)(n+1) \pmod{6}$  (1)

Vì  $n-1; n; n+1$  là 3 số nguyên liên tiếp nên  $n(n-1)(n+1) \vdots 2$  và 3

Mà UCLN(2;3)=1. Suy ra  $n(n-1)(n+1) \vdots 6$  (2)

Từ (1);(2)  $\Rightarrow Q \vdots 6$  (đpcm)

Câu 5.2

Tìm tất cả các số nguyên  $x$  sao cho giá trị của biểu thức  $(x+3)(x^2+x-5) = a^2$  ( $x+3)(x^2+x-5)$

là một số chính phương  $(x+3)(x^2+x-5)$

*Lời giải* Phương trình  $(x+3)(x^2+x-5) = 0$  chỉ có nghiệm nguyên  $x = -3$  vì phương trình  $x^2+x-5=0$  không có nghiệm nguyên.

Giả sử  $(x+3)(x^2+x-5) = a^2$  với  $a$  nguyên dương (1)

Nếu  $x+3 < 0$  thì  $x-2 < 0$  suy ra  $x^2+x-5 = (x+3)(x-2)+1 > 0$ . Vô lý.

Suy ra  $x+3 > 0$  dẫn tới  $x^2+x-5 > 0$  (2)

Gọi  $d$  là UCLN của  $x+3$  và  $x^2+x-5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3:d \\ x^2+x-5:d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3:d \\ (x-2)(x+3)+1:d \end{cases} \Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1 \quad (3)$$

Từ (1),(2) và (3)  $\Rightarrow x+3$  và  $x^2+x-5$  cùng là các số chính phương.

$$\text{Đặt } \begin{cases} 2x+1+2b=-1 \\ 2x+1-2b=-21 \end{cases} \Leftrightarrow 2(2x+1)=-22 \Leftrightarrow x=-6 \Rightarrow x+3=-3 \quad \text{với } b \text{ nguyên dương}$$

$$\Rightarrow 4x^2+4x-20=(2b)^2$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2-(2b)^2=21 \Leftrightarrow (2x+1-2b)(2x+1+2b)=21$$

Vì  $2x+1+2b > 2x+1-2b$  với mọi  $b$  nguyên dương. Hơn nữa  $x+3 > 0$  nên  $x \geq -2$  dẫn đến  $2x+1+2b \geq -2$ , ta có các TH sau xảy ra:

$$^2 \text{ TH1: } \begin{cases} 2x+1+2b=21 \\ 2x+1-2b=1 \end{cases} \Leftrightarrow 2(2x+1)=22 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow x+3=8 \text{ (Loại vì không là SCP)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x+1+2b=7 \\ 2x+1-2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow 2(2x+1)=10 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow x+3=5 \text{ (Loại vì không là SCP)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2x+1+2b=-1 \\ 2x+1-2b=-21 \end{cases} \Leftrightarrow 2(2x+1)=-22 \Leftrightarrow x=-6 \Rightarrow x+3=-3 \text{ (Loại vì không là SCP)}$$

Vậy  $x=-3$  là số duy nhất thỏa mãn

Câu 5.3

Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình:  $x^2y^2-4xy^2+x^3+4y^2-3x^2+1=0$

$$\text{Lời giải } x^2y^2-4xy^2+x^3+4y^2-3x^2+1=0 \Leftrightarrow y^2(x^2-4x+4)+x^3-3x^2+4=3$$

Do  $(x-2)^2 \geq 0$  và  $(x-2)^2$  là số chính phương (vì  $x \in \mathbb{N}^*$ ) nên ta có TH sau xảy ra:

$$\begin{cases} (x-2)^2=1 \\ y^2+x+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4=1 \\ x-2=-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \quad (\text{vì } y > 0)$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên dương  $(x;y)$  là  $(1;1)$

Câu 6

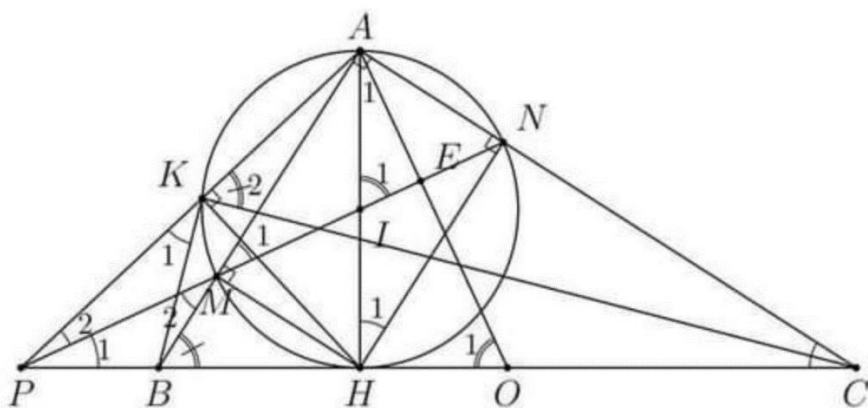
Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ) đường cao  $AH$ . Đường tròn tâm  $I$  đường kính  $AH$  cắt các cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $M, N$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $BC$ ;  $E$  là giao điểm của  $MN$  và  $OA$ .

a) Chứng minh tứ giác  $BMNC$  là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh  $\triangle AEI \sim \triangle AHO$  và  $\frac{AE}{HB} + \frac{AE}{HC} = 1$

c) Gọi  $P$  là giao điểm của  $BC$  và  $MN$ ;  $K$  là giao điểm thứ hai của  $AP$  và đường tròn đường kính  $AH$ . Chứng minh  $\angle BKC = 90^\circ$

Lời giải



a) Xét đường tròn  $(I)$  đường kính  $AH$ .

Ta có  $\angle ANH = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$M_1 = H_1$  (hai góc nội tiếp cùng chắn cung  $AN$ )

Lại có  $H_1 = HCA$  (cùng phụ với  $HAC$ )

Suy ra  $M_1 = BCN \Rightarrow BMNC$  là tứ giác nội tiếp

b) Vì  $IH = IN$  (bán kính của đường tròn  $(I)$ )

$$\Rightarrow \Delta IHN \text{ cân tại } I \Rightarrow I_1 = 2H_1 \Rightarrow I_1 = 2HCA$$

Vì  $O$  là trung điểm của  $BC$  và  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  nên  $OA = OC \Rightarrow \Delta OAC$  cân tại  $O$

$$\Rightarrow O_1 = 2OCA. \text{ Suy ra } I_1 = O_1. \text{ Lại có } A_1 \text{ chung suy ra } \Delta AIE \sim \Delta AOH \text{ (g-g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AO} = \frac{AE}{AH} \Rightarrow AI.AH = AO.AE \Rightarrow 2AI.AH = 2AO.AE \Rightarrow AH^2 = BC.AE$$

$$\Rightarrow HB.HC = (HB + HC).AE \text{ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông } ABC) \Rightarrow \frac{AE}{HB} + \frac{AE}{HC} = 1$$

c) Vì  $M_2 = M_1$  (đối đỉnh), theo phần a thì  $M_1 = PCN$ .

$$\text{Lại có } P_1 \text{ là góc chung} \Rightarrow \Delta PMB \sim \Delta PCN \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{PM}{PC} = \frac{PB}{PN} \Rightarrow PB.PC = PM.PN$$

Lại có  $AKMN$  là tứ giác nội tiếp (4 đỉnh đều thuộc đường tròn  $(I)$ )  $\Rightarrow PKM = PNA$

$$\text{Lại có } P_2 \text{ chung nên } \Delta PKM \sim \Delta PNA \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{PK}{PN} = \frac{PM}{PA} \Rightarrow PM.PN = PK.PA$$

$$\text{Suy ra } PB.PC = PK.PA \Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{PK}{PC}, \text{ lại có } KPB \text{ chung} \Rightarrow \Delta PBK \sim \Delta PAC \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow K_1 = BCA \Rightarrow AKBC \text{ là tứ giác nội tiếp} \Rightarrow BKC = BAC = 90^\circ$$