

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(\frac{x-2}{x-\sqrt{x}-2} - 1 \right)$

Với $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình : $x^2 - 3x + 2 + 2(2-x)\sqrt{x-1} = 0$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 8x + 4y = -1 \\ x^2 + 7y^2 - 4xy + 6y = 6 \end{cases}$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + 2y + 3z \leq 6$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^2 + 4y^2 + 9z^2} + \frac{1}{49xy} + \frac{3}{49yz} + \frac{3}{98zx} \geq \frac{9}{49}$$

2) Tìm tất cả các số nguyên dương a và các số nguyên tố p sao cho $a^2 = 7p^4 + 9$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Đường thẳng MN cắt (O) tại các điểm P, Q (P thuộc cung nhỏ AB và Q thuộc cung nhỏ AC). Lấy điểm D trên cạnh BC (D khác B và C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt AB tại điểm I (I khác B). Đường thẳng DI cắt AC tại K

1) Chứng minh rằng tứ giác $AIPK$ nội tiếp

2) Chứng minh rằng $PK \cdot PD = QB \cdot QA$

3) Đường thẳng CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (G khác P).

Đường thẳng IG cắt đường thẳng BC tại điểm E . Chứng minh rằng khi điểm D di chuyển trên cạnh BC thì tỉ số $\frac{CD}{CE}$ không đổi

Câu 5. (1,0 điểm) Cho bảng ô vuông 3×3 (gồm ba dòng và ba cột). Người ta ghi tất cả các số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ vào các ô vuông của bảng, mỗi ô vuông ghi một số, sao cho tổng các số trong mỗi bảng ô vuông con cỡ 2×2 đều bằng nhau

1) Hãy chỉ ra một cách ghi các số vào bảng thỏa mãn yêu cầu

2) Trong tất cả các cách ghi các số vào bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán, tìm giá trị lớn nhất của tổng các số trong mỗi bảng vuông con cỡ 2×2

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(\frac{x-2}{x-\sqrt{x}-2} - 1 \right)$

Với $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$

1) Rút gọn biểu thức A

Đặt $a = \sqrt{x}$, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{a+3}{a-2} - \frac{a+2}{a-3} + \frac{a+2}{a^2-5a+6} \right) : \left(\frac{a^2-2}{a^2-a-2} - 1 \right) \\ &= \frac{a^2-9-a^2+4+a+2}{(a-2)(a-3)} \cdot \frac{(a-2)(a+1)}{a} = \frac{(a-3) \cdot (a+1)}{(a-3) \cdot a} = \frac{a+1}{a} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$

$$x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1. \text{ Khi đó } A = \frac{\sqrt{2}-1+1}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình : $x^2 - 3x + 2 + 2(2-x)\sqrt{x-1} = 0$

$$x^2 - 3x + 2 + 2(2-x)\sqrt{x-1} = 0 (x \geq 1) \Leftrightarrow (x-2)(x-1) - 2(x-2)\sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x-1-2\sqrt{x-1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{x-1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \text{ (tm)} \\ x=5 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1; 2; 5\}$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 8x + 4y = -1 \\ x^2 + 7y^2 - 4xy + 6y = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 8x + 4y = -1 \\ x^2 + 7y^2 - 4xy + 6y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+2)^2 + 2(y^2+1) = 9(1) \\ (x-2y)^2 + 3(y+1)^2 = 9(2) \end{cases}$$

Trừ hai phương trình trên vế theo vế, ta được :

$$2(x+2)^2 - (x-2y)^2 - (y+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - (x-2y)^2 + (x+2)^2 - (y+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1).4.(y+1) + (x-y+1)(x+y+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1)(x+5y+7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 4(x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2} \end{cases} \\ x = -5y-7 \rightarrow (2) \Leftrightarrow 52(y+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-26+3\sqrt{13}}{26} \Rightarrow x = \frac{52+5\sqrt{13}}{26} \\ y = \frac{-26-3\sqrt{13}}{26} \Rightarrow x = \frac{-52+5\sqrt{13}}{26} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm :

$$(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right); \left(-\frac{52+5\sqrt{13}}{26}; \frac{-26+3\sqrt{13}}{26}\right); \left(\frac{-52+5\sqrt{13}}{26}; \frac{-26-3\sqrt{13}}{26}\right)$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+2y+3z \leq 6$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^2+4y^2+9z^2} + \frac{1}{49xy} + \frac{3}{49yz} + \frac{3}{98zx} \geq \frac{9}{49}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si – Schwarz ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+4y^2+9z^2} + \frac{1}{49xy} + \frac{3}{49yz} + \frac{3}{98zx} &= \frac{1}{x^2+4y^2+9z^2} + \frac{\frac{4}{49}}{4xy} + \frac{\frac{36}{49}}{12yz} + \frac{\frac{9}{49}}{6zx} \\ &\geq \frac{\left(1 + \frac{2}{7} + \frac{6}{7} + \frac{3}{7}\right)^2}{x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx} = \frac{18^2}{7^2} \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{9}{49} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \end{aligned}$$

2) Tìm tất cả các số nguyên dương a và các số nguyên tố p sao cho $a^2 = 7p^4 + 9$

Đễ thấy $(a; p) = (11; 2)$ và $(a; p) = (24; 3)$ thỏa mãn

Xét $p > 3$, khi đó a chẵn và $(a-3)(a+3) = 7p^4$

Đặt $d = UCLN(a-3; a+3) \Rightarrow 6 \nmid d$ mà $a-3$ lẻ nên $3 \nmid d \Rightarrow (a-3) \nmid 3 \Rightarrow 7p^4 \nmid 3 \Rightarrow p \nmid 3$ (vô lý)

Nếu $d = 1 \Rightarrow (a-3, a+3) = 1$

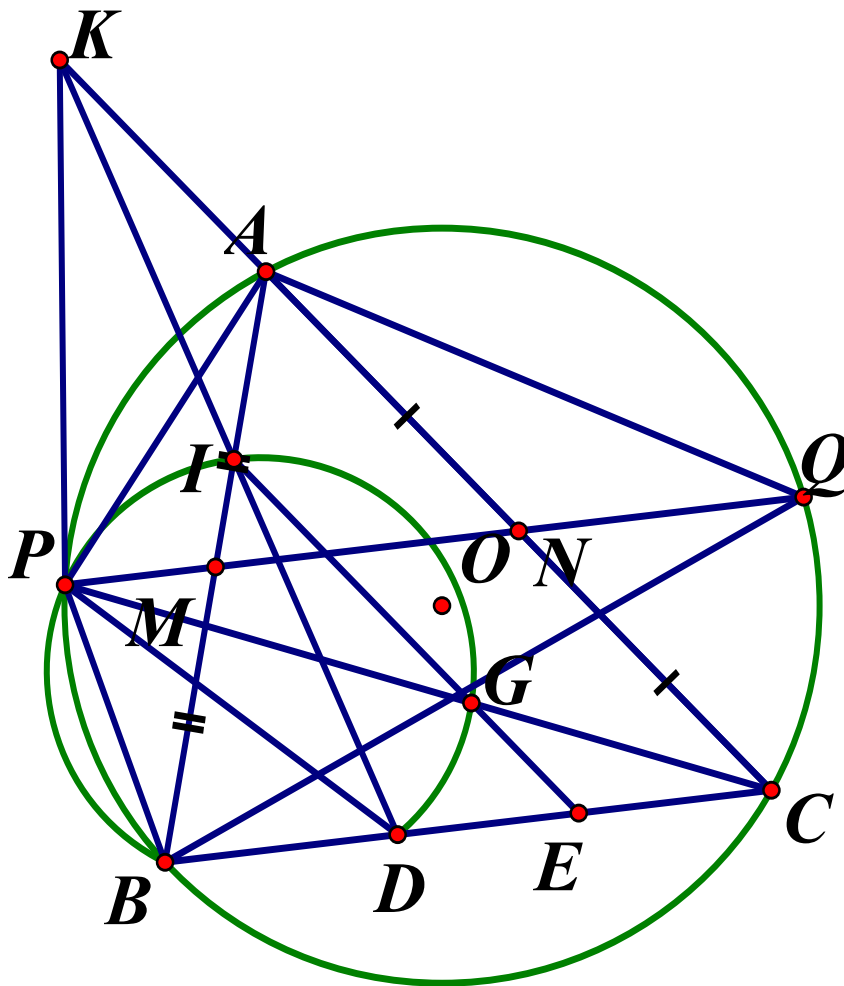
Nếu $p = 7 \Rightarrow \begin{cases} a-3 = 1 \\ a+3 = 7^5 \end{cases} (ktm)$

$$\text{Nếu } p \neq 7, p^4 > 7 \Rightarrow \begin{cases} a-3=1 \\ a+3=7p^4 \end{cases} \Rightarrow 7p^4 = 7(ktm)$$

$$\begin{cases} a-3=7 \\ a+3=p^4 \end{cases} \Rightarrow p^4 = 13(ktm)$$

Vậy $(a; p) = (11; 2), (24; 3)$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Đường thẳng MN cắt (O) tại các điểm P, Q (P thuộc cung nhỏ AB và Q thuộc cung nhỏ AC). Lấy điểm D trên cạnh BC (D khác B và C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt AB tại điểm I (I khác B). Đường thẳng DI cắt AC tại K



1) Chứng minh rằng tứ giác $AIPK$ nội tiếp

Do các tứ giác $IPBD, APBC$ nội tiếp nên $\angle KIP = \angle PBD = \angle KAP$. Vậy tứ giác $AIPK$ nội tiếp

2) Chứng minh rằng $PK \cdot PD = QB \cdot QA$

Do tứ giác $AKPI, BDIP$ nội tiếp nên $\angle PKD = \angle PBA$ và $\angle PDK = \angle PBA$. Suy ra

$$\Delta PKD \sim \Delta PAB \Rightarrow \frac{PK}{PD} = \frac{PA}{PB}$$

Ta cũng có tứ giác $APBQ$ nội tiếp nên $\angle MAP = \angle MQB$ và $\angle MPQ = \angle MBQ$

$$\Rightarrow \Delta AMP \sim \Delta QMB \Rightarrow \frac{PA}{QB} = \frac{AM}{QM}. \text{ Tương tự ta cũng có: } \frac{PB}{QA} = \frac{BM}{QM}. \text{ Do } AM = BM$$

$$\Rightarrow \frac{PA}{QB} = \frac{PB}{QA} \text{ hay } \frac{PA}{PB} = \frac{QB}{QA}$$

$$\text{Vậy } \frac{PK}{PD} = \frac{PA}{PB} = \frac{QB}{QA}$$

3) Đường thẳng CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (G khác P). Đường thẳng IG cắt đường thẳng BC tại điểm E . Chứng minh rằng khi điểm D di chuyển trên cạnh BC thì tỉ số $\frac{CD}{CE}$ không đổi

Do tứ giác $IPBG$ nội tiếp nên $\angle BIG = \angle BPG = \angle BAC \Rightarrow IG \parallel AC$.

Theo định lý Ta-let, ta có : $\frac{CD}{CE} = \frac{KD}{KI}$

Lấy điểm J trên AB sao cho $\angle APJ = \angle KPI = \angle BAC$, khi đó J cố định và do

$$\Delta PKD \sim \Delta PAB \text{ và } I, J \text{ chia } KD, KB \text{ theo cùng tỉ số nên } \frac{KD}{KI} = \frac{AB}{AJ}$$

$$\text{Vậy } \frac{CD}{CE} = \frac{AB}{AJ} \text{ cố định}$$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho bảng ô vuông 3×3 (gồm ba dòng và ba cột). Người ta ghi tất cả các số thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ vào các ô vuông của bảng, mỗi ô vuông ghi một số, sao cho tổng các số trong mỗi bảng ô vuông con cỡ 2×2 đều bằng nhau

1) Hãy chỉ ra một cách ghi các số vào bảng thỏa mãn yêu cầu

Cách điền số sau thỏa mãn bài toán. Tổng mỗi bảng con 2×2 là 24

1	8	4
6	9	3
2	7	5

2) Trong tất cả các cách ghi các số vào bảng thỏa mãn yêu cầu bài toán, tìm giá trị lớn nhất của tổng các số trong mỗi bảng vuông con cỡ 2×2

Giả sử ta có cách điền các số vào bảng thỏa mãn yêu cầu như sau

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Theo giả thiết, tồn tại số A sao cho

$$A = a + b + d + e = b + c + e + f = d + e + g + h = e + f + h + i$$

$$\Rightarrow 4A = (a + b + c + d + e + f + g + h + i) + b + d + f + h + 3e = 45 + b + d + f + h + 3e$$

$$\Rightarrow 4A = 45 + b + d + f + h + e + 2e \leq 45 + (9 + 8 + 7 + 6 + 5) + 3 \times 9 = 98$$

$$\Rightarrow A \leq 24$$

Kết hợp với cách điền ở ý a, ta được GTLN của tổng các số ở mỗi bảng ô vuông con 2×2 là 24.