

Câu 1 (4,0 điểm).

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để M nhận giá trị là một số nguyên tố.

$$M = |x^3 - 2x^2 - 10x + 8|$$

Câu 2 (4,0 điểm).

Cho ba số $A; B; C$ thỏa mãn

$$|\sin A + \sin B + \sin C| \geq \sqrt{5}$$

Chứng minh rằng $|\cos A + \cos B + \cos C| \leq 2$

Câu 3 (4,0 điểm).

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn

$$f[2f(x) + f(y)] = 2x + y \quad \text{với mọi } x; y \in \mathbb{R}$$

Câu 4 (4,0 điểm).

Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 2; u_{n+1} = 4u_n + \sqrt{15u_n^2 - 60}$ ($n \in \mathbb{N}$).

- Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- Chứng minh rằng dãy số (u_n) có các số hạng đều là số nguyên.
- Tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n) .

Câu 5 (4,0 điểm).

Các điểm $P; Q; R$ nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC sao cho AP, BQ, CR cắt nhau tại S đồng thời thỏa mãn

$$S_{ABS} = S_{QSPC} \quad \text{và} \quad \frac{S_{ARC}}{S_{BRC}} = \frac{(CA)^4}{(BC)^4}$$

Chứng minh rằng tứ giác $ABPQ$ nội tiếp trong một đường tròn.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh.; Số báo danh.

Câu 6 (5,0 điểm).

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = y \\ ay^2 + by + c = z \\ az^2 + bz + c = x \end{cases} \quad (a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

Chứng minh rằng nếu $(b - 1)^2 \geq 4ac$ thì hệ phương trình có nghiệm.

Câu 7 (5,0 điểm).

Cho phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có nghiệm.

Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$$

Câu 8 (5,0 điểm).

Một bảng ô vuông hình chữ nhật có 2020 hàng và 2021 cột. Ký hiệu (m, n) ($1 \leq m \leq 2020; 1 \leq n \leq 2021$) là ô vuông nằm ở hàng thứ m và cột thứ n . Thực hiện tô màu các ô vuông của bảng theo quy tắc sau:

+ Lần thứ nhất tô màu hai ô vuông $(r, s); (r + 1; s + 1)$ với $1 \leq r \leq 2019$
 $1 \leq s \leq 2020$.

+ Lần thứ hai trở đi, tô màu hai ô vuông chưa có màu nằm cạnh nhau trong cùng một hàng hay cùng một cột.

Chứng minh không thể tô màu tất cả các ô của bảng đã cho.

Câu 9 (5,0 điểm).

Cho ABC là tam giác có ba góc nhọn. Gọi A', B' và C' là các điểm đối xứng với A, B và C lần lượt qua BC, CA và AB . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABB' và ACC' có A_1 là điểm chung thứ hai. Tương tự B_1 và C_1 là điểm chung thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $BAA'; BCC'$ và $CAA'; CBB'$. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1 và CC_1 đồng quy.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay

Họ và tên thí sinh.; Số báo danh.