

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài 180 phút, không kể phát đề)

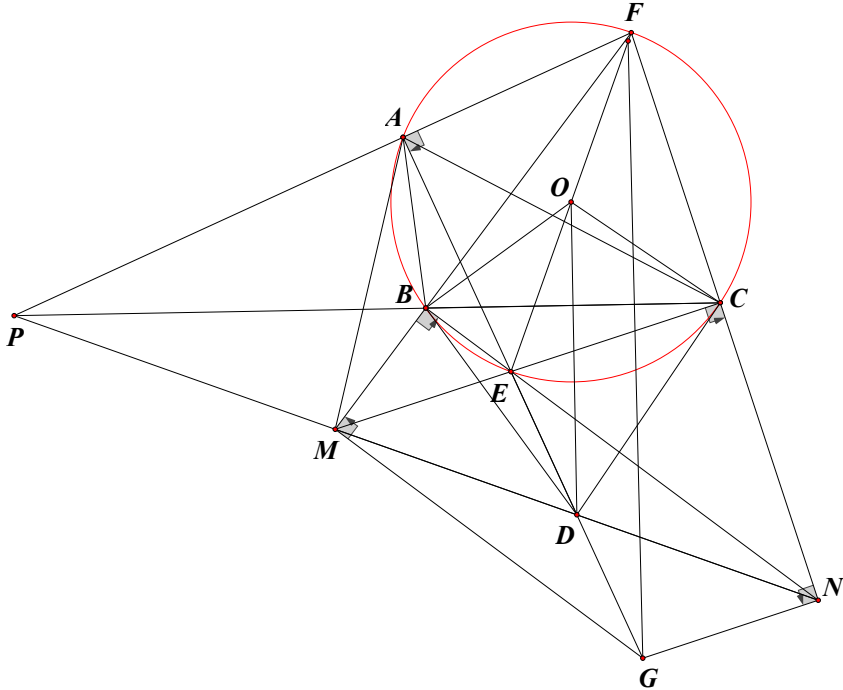
Ngày thi: 17/8/2024

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Bài	Đáp án	Điểm
1	Xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 6$ và $u_{n+1} = 3u_n + \frac{3^n}{u_n}$, với mọi $n \geq 1$. a) Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.	
	Bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n > 0, \forall n \geq 1$. Kết hợp giả thiết, ta được $u_{n+1} > 3u_n, \forall n \geq 1$. Khi đó $u_n > 3 \cdot u_{n-1} > 3^2 \cdot u_{n-2} > \dots > 3^{n-1} \cdot u_1 = 2 \cdot 3^n$. Mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cdot 3^n = +\infty$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.	2,0
	b) Cho dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = \frac{u_n}{3^n}$, với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.	
	Ta có $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{u_n}{3^n} = \frac{3u_n + \frac{3^n}{u_n}}{3^{n+1}} - \frac{u_n}{3^n} = \frac{1}{3u_n} > 0, \forall n \geq 1$. Do đó $v_{n+1} > v_n$ nên dãy số (v_n) tăng ngặt.	1,0
	Ta có $v_1 = 2$ và $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3u_n} < \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}, \forall n \geq 1.$ Khi đó $v_n - v_{n-1} < \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ và cứ thế $v_2 - v_1 < \frac{1}{2 \cdot 3^2}$. Cộng các đánh giá lại, ta được $v_n < v_1 + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^n} = 2 + \frac{1}{18} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{25}{12}.$ Từ đó ta được dãy số (v_n) tăng ngặt và bị chặn trên nên sẽ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.	2,0
2	a) Cho hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $(x-2)f(y) + f(y+2f(x)) = f(x+yf(x))$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Biết $f(0)$ khác 0. Chứng minh rằng f đơn ánh.	

	Đặt $f(0) = a$ ($a \neq 0$), thay y bởi 0, ta có $(x-2)a + f(2f(x)) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (*).$ Giả sử $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2)$. Khi đó $f(2f(x_1)) = f(2f(x_2))$. Thay $x = x_1, x = x_2$ vào $(*)$, ta có $\begin{cases} (x_1-2)a + f(2f(x_1)) = f(x_1) \\ (x_2-2)a + f(2f(x_2)) = f(x_2) \end{cases}.$ Trừ vế theo vế hai phương trình trên ta được $(x_1 - x_2)a = 0$. Từ đó ta suy ra $x_1 = x_2$. Do vậy f đơn ánh.	2,0
	b) Số nguyên dương n được gọi là “đẹp” nếu như tồn tại đa thức hệ số thực $P(x)$ bậc n, có hệ số bậc cao nhất là 1 và thoả mãn đồng thời các điều kiện sau: i) $P(x) > -15, \forall x \in \mathbb{R}$. ii) Tập nghiệm của $P(x)$ có chứa các số $-3; -1; 1$ và 3. Chứng minh rằng $n = 4$ và $n = 6$ không phải là số đẹp. Từ đó tìm tất cả các số đẹp.	
	Nếu $n = 4$ thì $P(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3) = x^4 - 10x^2 + 9.$ Ta cần có $P(x) > -15, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 24 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tuy nhiên, điều này là không thoả mãn vì vế trái có nghiệm là $x = \pm 2$.	1,0
	Nếu $n = 6$ thì $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 + ax + b) \text{ với } a, b \in \mathbb{R}.$ Ta cần có $(x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 + ax + b) > -15, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$. - Thay $x = 0$ vào $(*)$ được $9b > -15$ nên $b > -\frac{5}{3}$. - Thay $x = 2$ vào $(*)$ được $-15(4 + 2a + b) > -15$ nên $2a + b < -3$. - Thay $x = -2$ vào $(*)$ được $-15(4 - 2a + b) > -15$ nên $-2a + b < -3$. Cộng từng vế của hai đánh giá cuối, ta được $b < -3 < -\frac{5}{3}$. Điều mâu thuẫn này cho thấy không tồn tại $(a; b)$ để có $(*)$ nên $n = 6$ không thoả mãn.	1,0
	Nếu n lẻ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$ nên điều kiện i) không được thoả mãn. Vì thế số n phải chẵn. Ngoài ra $P(x)$ có ít nhất 4 nghiệm thực phân biệt nên $\deg P \geq 4$. Theo chứng minh ở trên thì $n = 4$ và $n = 6$ đều không thoả mãn nên ta xét $n \geq 8$. Nếu $\deg P = 8$ thì chọn $P(x) = (x^2 - 1)^2(x^2 - 9)^2 \geq 0 > -15, \forall x \in \mathbb{R}$. Từ đó, nếu n chẵn và $n \geq 8$, ta chọn $P(x) = x^{n-8}(x^2 - 1)^2(x^2 - 9)^2 \geq 0$. Vậy tất cả các số đẹp cần tìm là n chẵn và $n \geq 8$.	1,0
3	Cho đường tròn (O), hai điểm B, C cố định thuộc đường tròn, BC không là đường kính của (O), điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác	

	ABC không cân tại A. Hai tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại D. Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm E khác A. Kẻ đường kính EF của (O), gọi M là giao điểm của BF và CE, N là giao điểm của CF và BE, P là giao điểm của AF và MN. a) Chứng minh rằng D là trung điểm của MN.	
		
	a) Ta có $\widehat{MBN} = \widehat{MCN} = 90^\circ$. Suy ra tứ giác $BCNM$ nội tiếp đường tròn đường kính MN. Ta có $\widehat{FMC} = \widehat{FNB}$ (cùng chắn $\widehat{BC}$). Mà $\widehat{BFC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{DOC}$. Và $\widehat{DOC}$ phụ với góc $\widehat{ODC}$ nên $\widehat{FNB} = \widehat{ODC}$. Do vậy $\widehat{BMC} = \widehat{BNC} = \frac{1}{2}\widehat{BDC}$. Mặt khác $DB = DC$ nên D là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCNM$ đường kính MN. Suy ra D là trung điểm MN.	2,0
	b) Chứng minh rằng P thuộc một đường thẳng cố định.	
	Gọi G đối xứng với E qua D, ta có tứ giác $EMGN$ là hình bình hành. Ta thấy tứ giác $AFGM$ nội tiếp đường tròn đường kính FG. Và tứ giác $AFGN$ cũng nội tiếp đường tròn đường kính FG. Nên tứ giác $AFNM$ nội tiếp. Dựa vào tâm đẳng phương của ba đường tròn $(AFNM)$, (O), $(BCNM)$ ta suy ra P thuộc đường thẳng BC cố định.	3,0
4	Với k là số nguyên dương, xét phương trình nghiệm nguyên dương $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = k.$ a) Chứng minh rằng với $k = 2025^{2024}$ thì phương trình trên vô nghiệm.	
	Trước hết, ta phân tích thành nhân tử cho vế trái của phương trình như sau $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)$ $= x^3(y-z) + y^3(z-y+y-x) + z^3(x-y)$	2,0

$= (y-z)(x^3 - y^3) - (x-y)(y^3 - z^3)$ $= (y-z)(x-y)(x^2 + xy + y^2 - y^2 - yz - z^2)$ $= (y-z)(x-y)[(x-y)(x+y) - y(x-y)]$ $= (x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z).$ Trong các số x, y, z phải có hai số cùng tính chẵn lẻ, nên một trong các hiệu $x-y, y-z$ và $x-z$ phải chẵn, tức là $(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)$ luôn chẵn. Mà 2025^{2024} là một số lẻ. Vì thế phương trình $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = 2025^{2024}$ vô nghiệm.	
b) Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương $k \leq 2024$ để phương trình trên có nghiệm nguyên dương?	
Ta tiếp tục chỉ ra rằng biểu thức $(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z)$ luôn chia hết cho 3 với mọi x, y, z nguyên. Nếu trong x, y, z có hai số cùng chia hết cho 3 thì đúng, còn ngược lại, chúng phải có số dư đôi một khác nhau khi chia cho 3. Khi đó $x+y+z \equiv 0+1+2 \equiv 0 \pmod{3}.$ Kết hợp với a), suy ra k phải chia hết cho 6.	1,0
Giả sử $z = \min\{x; y; z\}$ thì $x > y > z$ nên $x-y \geq 1, y-z \geq 1, x-z \geq 2 \text{ và } x+y+z \geq 3z+3 \geq 6.$ Khi đó $k \geq 1.1.2.6 = 12$. Vì thế điều kiện cần là k chia hết cho 6 và $k \geq 12$.	1,0
Đặt $k = 6m$ với $(m \in \mathbb{Z}, m \geq 2)$. Chọn $x-y=1, y-z=1$ thì $x-z=2$ và $x+y+z=3z+3$. Khi đó thay vào phương trình được $1.1.2.(3z+3) = 6m \text{ hay } z = m-1.$ Khi đó, phương trình luôn có nghiệm nguyên dương là $(m+1; m; m-1)$. Vậy số giá trị k cần tìm là $\left[\frac{2024}{6} \right] - 1 = 336$.	1,0

----- Hết -----