

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9
THÁI NGUYÊN NĂM HỌC 2020 – 2021**

Môn: **TOÁN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1. a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-3\sqrt{x}+2} \right)$

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào x (với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$)

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = ax - 4$ ($a \neq 0$) và hai điểm A(0;-2), B(6;0). Tìm các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N sao cho $S_{OAB} = S_{OMN}$

Bài 2. a) Tìm nghiệm nguyên dương x, y của phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$

b) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $(2020n^2 + 2)$ không phải là lập phương của một số tự nhiên.

c) Tìm các cặp số nguyên tố (p;q) thỏa mãn: $3pq^2 + p = q^3 + 3p^3 + 3$

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) lấy hai điểm M, N sao cho MN song song với AC và $AM < AN$. Gọi P là giao điểm của BM và AC. Trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) lấy điểm Q sao cho PQ vuông góc với BC. Gọi R là giao điểm của AC và QN; F là giao điểm của AQ và BN.

a) Chứng minh rằng các điểm B, P, Q, R cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng BR vuông góc với AQ.

c) Chứng minh rằng $\widehat{AFB} = \widehat{BPQ} + \widehat{ABR}$

Bài 4. Có n vận động viên tham gia một giải thi đấu cầu lông theo thể thức loại trực tiếp, nghĩa là vận động viên thua sẽ bị loại ngay (không có trận đấu hòa). Theo thể lệ cuộc thi, hai vận động viên chỉ có thể được thi đấu với nhau nếu chênh lệch giữa số trận đã thi đấu của họ không quá 1. Biết rằng, cuối cùng chỉ có đúng một vận động viên vô địch, các vận động viên khác đều bị loại. Tìm n nhỏ nhất sao cho vận động viên vô địch thắng được đúng 10 trận đấu.

Bài 5. Cho các số tự nhiên a, b thỏa mãn $(4a^2 + 2b^2 + 4ab + 12a + 8b + 2020)$ chia hết cho 3.

Chứng minh rằng (a-b) chia hết cho 3.

-----HẾT-----

Bài 1.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \left[\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \right] \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{x-3} \\
 &= \frac{x-3}{x-3} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

b) A(0;-2) nên AO=2, B(6;0) nên OB=6. $S_{OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB = 6$

(d): $y=ax-4$ ($a \neq 0$)

$$d \cap Ox = M \Rightarrow M\left(\frac{4}{a}; 0\right) \Rightarrow OM = \frac{4}{|a|}$$

$$d \cap Oy = N \Rightarrow N(0; -4) \Rightarrow ON = 4$$

$$S_{OMN} = \frac{1}{2}.OM.ON = \frac{8}{|a|}$$

$$S_{OMN} = S_{OAB} \Rightarrow \frac{8}{|a|} = 6$$

$$\Rightarrow a = \pm \frac{4}{3}$$

Bài 2.

a) Phương trình có dạng $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 17$

Ta có bảng:

x-3	1	-1	-1	1	4	-4	4	-4
y+2	4	-4	4	-4	1	-1	-1	1
x	4	2	2	4	7	-1	7	-1
y	2	-6	2	-6	-1	-3	-3	-1

Các giá trị x, y ở bảng trên là giá trị của x, y

b) Đang cập nhật....

c) $3pq^2 + p = q^3 + 3p^3 + 3$

Hai số p, q không thể cùng là số lẻ.

Nếu $p=q \Rightarrow 3p^3 + p = 4p^3 + 3 \Rightarrow p^3 - p + 3 = 0 \Rightarrow p(1-p^2) = 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=3 \\ 1-p^2=1 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\Rightarrow p \neq q$$

Do đó trong 2 số p, q thì phải có 1 số lẻ, 1 số chẵn

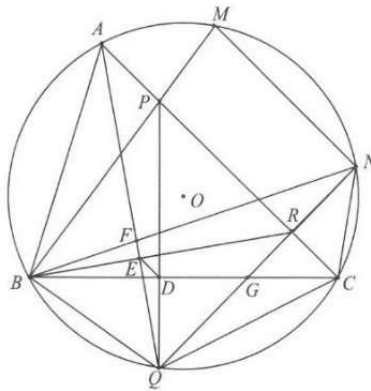
$$\Rightarrow 3pq^2 + p \text{ và } q^3 + 3p^3 + 3 \text{ là số lẻ}$$

$$\Rightarrow p=2$$

$$\Rightarrow 6q^2 + 2 = q^3 + 27 \Leftrightarrow q=5$$

Vậy (p;q)=(2;5)

Bài 3.



a) Tứ giác BMNQ nội tiếp nên $\widehat{BMN} + \widehat{BQN} = 180^\circ$

$$\text{Mà } \widehat{BPR} = \widehat{BMN} \text{ (do } MN \parallel BC \text{).}$$

Từ đó $\widehat{BPR} + \widehat{BQN} = 180^\circ$, suy ra tứ giác BPRQ nội tiếp. Tức là B; P; R; Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi PQ giao BC tại D, AQ giao BR tại E, ta có:

$$\widehat{EQD} = \widehat{DQB} - \widehat{AQB} = \widehat{PRB} - \widehat{ACB} = \widehat{RBC} = \widehat{EBD}.$$

Vậy tứ giác $BEDQ$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BEQ} = \widehat{BDQ} = 90^\circ \Rightarrow BR \perp AQ$.

c) Ta có:

$$\begin{aligned}\widehat{BPQ} &= \widehat{BRQ} = \widehat{RBN} + \widehat{RNB} = \widehat{EBF} + \widehat{BAE} = 90^\circ - \widehat{BFE} + 90^\circ - \widehat{ABE} \\ &= 180^\circ - \widehat{BFE} - \widehat{ABE} = \widehat{AFB} - \widehat{ABR}.\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \widehat{AFB} = \widehat{BPQ} + \widehat{ABR}.$$

Bài 4. Đang cập nhật.....

Bài 5. Ta có:

$$\begin{aligned}(4a^2 + 2b^2 + 4ab + 12a + 8b + 2020) : 3 \\ \Leftrightarrow [(4a^2 + 4ab + b^2) + 12a + (b^2 + 8b + 16) + 2004] : 3 \\ \Leftrightarrow [(2a + b)^2 + 12a + (b + 4)^2 + 2004] : 3\end{aligned}$$

$$\text{Vi } (12a + 2004) : 3 \Rightarrow [(2a + b)^2 + (b + 4)^2] : 3$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} (2a + b)^2 : 3 \\ (b + 4)^2 : 3 \end{cases} \Rightarrow (2a + b) : 3 \Rightarrow (2a + b - 3b) : 3$$

$$\text{Vậy: } (a - b) : 3$$