

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 - 2x + 2 = \sqrt{(x^2 + 4)(x + 1)}$

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 3$. Tính giá trị của biểu thức :

$$P = \frac{1}{a^2(b+c)+3} + \frac{1}{b^2(c+a)+3} + \frac{1}{c^2(a+b)+3}$$

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $5^p + p^2$ chia hết cho 6

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn :

$$x^3 - x^2y + 2x = 5x^2 - 2y - 1$$

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 2$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3(a + b + c) \geq -\frac{9}{4}$$

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho các phương trình $x^2 - 2ax + b = 0$,
 $x^2 - 2bx + c = 0$, $x^2 - 2cx + a = 0$ đều có nghiệm là các số nguyên dương

Bài 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF và BC

a) Chứng minh rằng $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$

b) Chứng minh rằng đường thẳng AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK

c) Gọi P là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến đường thẳng EF . Chứng minh rằng đường thẳng DP song song với đường thẳng AI

Bài 5. (1,0 điểm) Trên bảng có hai số tự nhiên m và n . An và Bình chơi một trò chơi như sau : Mỗi lượt chơi, một bạn chọn một hai số trên bảng để xóa và viết lên bảng một số mới là hiệu không âm của số vừa xóa với một ước số tự nhiên bất kỳ của số vừa xóa. Hai bạn luân phiên thực hiện lượt chơi. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Biết rằng An là người thực hiện lượt chơi đầu tiên

a) Với $m = 2022$ và $n = 2023$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc

b) Với $m = 2022, n = 1981$, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc

ĐÁP ÁN

Bài 1. (2,0 điểm)

c) Giải phương trình $x^2 - 2x + 2 = \sqrt{(x^2 + 4)(x + 1)}$

Điều kiện : $x \geq -1$. Phương trình đã cho có thể viết lại thành :

$$(x^2 + 4) - 2(x + 1) = \sqrt{(x^2 + 4)(x + 1)} \text{ hay } (\sqrt{x^2 + 4} - 2\sqrt{x + 1})(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x + 1}) = 0$$

$$\text{Từ đó, ta có } \sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{x + 1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(tm) \\ x = 4(tm) \end{cases}$$

Vậy $S = \{0; 4\}$

d) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 3$. Tính giá trị của biểu

$$\text{thức : } P = \frac{1}{a^2(b+c)+3} + \frac{1}{b^2(c+a)+3} + \frac{1}{c^2(a+b)+3}$$

Do $abc = 3$ nên

$$\frac{1}{a^2(b+c)+3} = \frac{1}{a^2(b+c)+abc} = \frac{1}{a(ab+bc+ca)} = \frac{bc}{3(ab+bc+ca)}$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có :

$$\frac{1}{b^2(c+a)+3} = \frac{ca}{3(ab+bc+ca)}, \quad \frac{1}{c^2(a+b)+3} = \frac{ab}{3(ab+bc+ca)}$$

$$\text{Do đó } P = \frac{ab+bc+ca}{3(ab+bc+ca)} = \frac{1}{3}$$

Bài 2. (2,0 điểm)

c) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $5^p + p^2$ chia hết cho 6

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ và p không chia hết cho 3. Do p lẻ nên hiệu nhiên $5^p + p^2$ là số chẵn (1)

Do p không chia hết cho 3 nên p chia 3 dư 1 hoặc 2, suy ra p^2 chia dư 1. Mặt khác, do p lẻ nên 5^p chia 3 dư 2. Từ đây, ta suy ra $5^p + p^2$ chia hết cho 3 (2)

Từ (1) và (2), với chú ý $(2, 3) = 1$, là có $5^p + p^2$ chia hết cho $2.3 = 6$.

d) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn :

$$x^3 - x^2y + 2x = 5x^2 - 2y - 1$$

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = y(x^2 - 2)$

Do $x^2 - 2 \neq 0$ nên từ đây, ta suy ra $x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ chia hết cho $x^2 - 2$. Từ đó

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2)(x - 5) = 4x - 9 \text{ chia hết cho } x^2 - 2$$

Và như thế, ta có $16(x^2 - 2) - (4x + 9)(4x - 9) = 49$ chia hết cho $x^2 - 2$

Vì $x^2 - 2 \geq -2$ nên từ kết quả trên, ta suy ra $x^2 - 2 \in \{-1; 1; 7; 49\}$ hay $x \in \{-1; 1; -3; 3\}$

Lần lượt thay các giá trị này vào phương trình (1), ta tìm được các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(-1, 7)$, $(1, 1)$ và $(-3, -11)$

Bài 3. (2,0 điểm)

c) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 2$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3(a + b + c) \geq -\frac{9}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ ta có : $a^2 + 4 \geq 4a$, $b^2 + 4 \geq 4b$, $c^2 + \frac{1}{4} \geq c$

Từ các bất đẳng thức trên, ta suy ra : $a^2 \geq 4a - 4$, $b^2 \geq 4b - 4$; $c^2 \geq c - \frac{1}{4}$. Do đó :

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3(a + b + c) \geq a + b + 4c - \frac{33}{4} \geq 3\sqrt[3]{4abc} - \frac{33}{4} = -\frac{9}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$ và $c = \frac{1}{2}$

d) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c sao cho các phương trình $x^2 - 2ax + b = 0$, $x^2 - 2bx + c = 0$, $x^2 - 2cx + a = 0$ đều có nghiệm là các số nguyên dương

Gọi m là nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 - 2ax + b = 0$. Khi đó, ta có

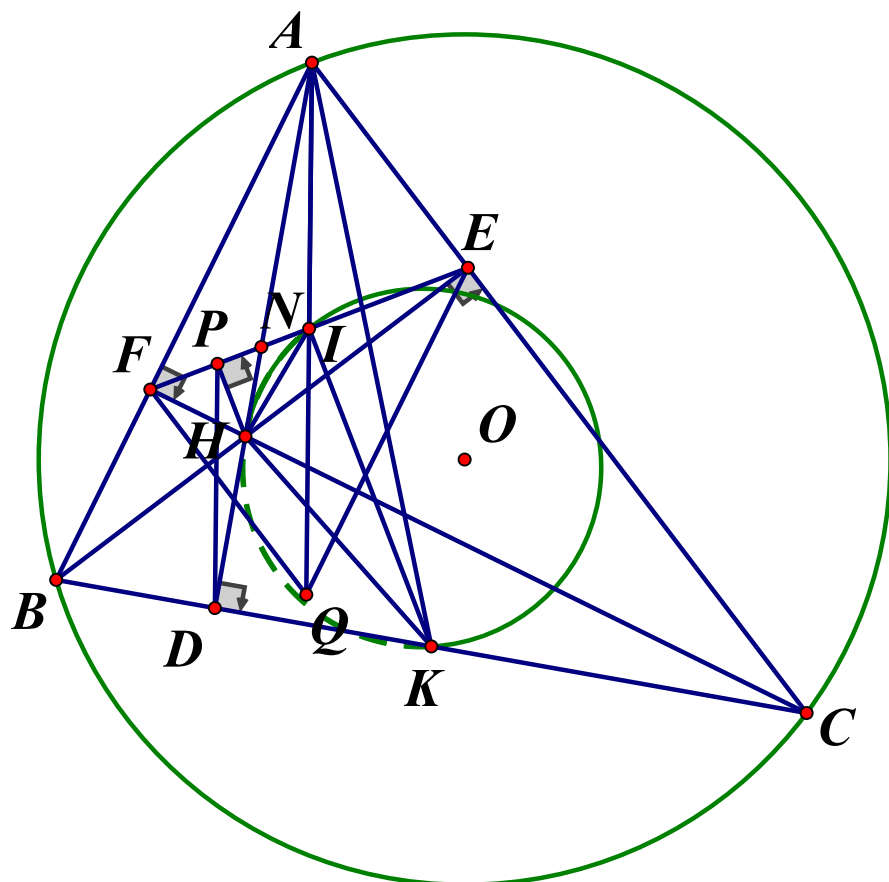
$$m^2 - 2am + b = 0 \text{ hay } (m - a)^2 = a^2 - b. \text{ Suy ra } a^2 - b \text{ là số chính phương}$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $b^2 - c$ và $c^2 - a$ đều là số chính phương. Không mất tính tổng quát, giả sử a là số lớn nhất trong các số a, b, c

Nếu $a > 1$, thì ta có $a^2 - b < a^2$ và $a^2 - b \geq a^2 - a = (a - 1)^2 + a - 1 > (a - 1)^2$ nên $a^2 - b$ không thể là số chính phương, mâu thuẫn

Do đó, ta phải có $a = 1$. Mà a, b, c là các số nguyên dương và a là lớn nhất trong ba số này nên $a = b = c = 1$. Thử lại, ta thấy với $a = b = c = 1$ thì cả ba phương trình đều có nghiệm nguyên dương $x = 1$. Vậy $(a; b; c) = (1; 1; 1)$

Bài 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cùng đi qua điểm H . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF và BC



d) Chứng minh rằng $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{HK}$

Do AD, BE, CF là đường cao của tam giác ABC nên $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$, suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AEF = \angle ABC \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC(g.g)$

Lại có I, K tương ứng là trung điểm của EF và BC nên $\triangle AEI \sim \triangle ABK(c.g.c)$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AK} = \frac{EI}{BK} = \frac{EF}{BC}$$

Ta cũng có $\angle HEF = \angle HCB$ nên $\triangle HEF \sim \triangle HCB(g.g)$, mà I, K tương ứng là trung điểm EF và BC nên $\triangle HFI \sim \triangle HBK(c.g.c) \Rightarrow \frac{HI}{HK} = \frac{FI}{BK} = \frac{EF}{BC}$

Như vậy, ta có : $\frac{AI}{AK} = \frac{HI}{KH}$

e) Chứng minh rằng đường thẳng AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IHK

Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AD và EF

Do $KE = KF = KB = KC$ nên $KI \perp EF$

Mà $\angle NDK = 90^\circ$ nên tứ giác $DNİK$ nội tiếp . suy ra $\angle ANI = \angle DKI$

Lại có $\triangle HFI \sim \triangle HBK$ nên $\angle HIN = \angle HKD$

Từ đó suy ra $\angle ANI - \angle HIN = \angle DKI - \angle HKD$ hay $\angle HKI = \angle NHI$

Do đó AH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle HKI$

f) Gọi P là chân đường vuông góc kẻ từ điểm H đến đường thẳng EF . Chứng minh rằng đường thẳng DP song song với đường thẳng AI

Gọi Q là điểm đối xứng với điểm A qua điểm I . Do I là trung điểm AQ và EF nên tứ giác $AEQF$ là hình bình hành. Suy ra $QE \parallel AF$ và $QF \parallel AE$

Từ đó $QE \perp HF$ và $QF \perp HE$ hay Q là trực tâm của $\triangle HEF$

Ta có $\triangle HEF \sim \triangle HCB(g.g)$ mà Q, A lần lượt là trực tâm của hai tam giác nên ta suy ra $\triangle HEP \sim \triangle HCD(g.g)$ và $\triangle HEQ \sim \triangle HCA(g.g)$

Từ đó suy ra $\frac{HP}{HQ} = \frac{HD}{HA} \Rightarrow DP \parallel AI$ (Định lý Talet đảo)

Bài 5.(1,0 điểm) Trên bảng có hai số tự nhiên m và n . An và Bình chơi một trò chơi như sau : Mỗi lượt chơi, một bạn chọn một hai số trên bảng để xóa và viết lên bảng một số mới là hiệu không âm của số vừa xóa với một ước số tự nhiên bất kỳ của số vừa xóa. Hai bạn luân phiên thực hiện luật chơi. Bạn đầu tiên không thể thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Biết rằng An là người thực hiện lượt chơi đầu tiên

Ở cả hai ý, An sẽ đều chọn số 2022 để xóa đi và viết lên bảng số $2022-1 = 2021$ ở lượt đầu tiên của mình. Khi đó, sau lượt chơi đầu tiên của An, trên bảng còn lại hai số lẻ.

Lúc này. đến lượt của Bình thủ dù Bình chơi thế nào đó chăng nữa, sau lượt của Bình, trên bảng luôn xuất hiện một số chẵn và một số lẻ (Bình chắc chắn sẽ không thực hiện cách chơi để số chẵn trở về bằng 0, vì lúc đó An sẽ có thể đưa hai số trên bảng trở về bằng 0.

Bình sẽ không thể thực hiện lượt chơi tiếp theo và thua cuộc). Lúc bấy giờ. An có thể chọn số chẵn xóa đi và viết lên bảng hiệu của số đó với 1. Trên bảng lại xuất hiện hai số lẻ và đến lượt của Bình.

An cứ tiếp tục thực hiện chiến thuật như vậy. Rõ ràng An luôn có thể thực hiện lượt chơi. Vì trò chơi phải kết thúc nên đến một lúc nào đó, Bình không thể thực hiện lượt chơi, Bình thua cuộc.